

## Тестирование полигармонического алгоритма МГУА

В данной работе рассматривается задача структурной идентификации колебательных процессов на основе полигармонического алгоритма МГУА. Приведены результаты тестирования программной реализации алгоритма (язык C++) полигармонического анализа временных рядов с применением тестовых и реальных данных. Представлен набор тестов, который можно использовать для оценки качества аналогичных программных средств.

Анализ литературы по МГУА [[www.gmdh.net](http://www.gmdh.net)] говорит о том, что в последнее десятилетие гармонический алгоритм МГУА незаслуженно забыт. И это несмотря на то, что в свое время это было одно из лучших теоретических достижений МГУА [1], а сам алгоритм и программа показали себя эффективными в практических приложениях [2,3,4] .

В данной статье содержится краткая характеристика полигармонического алгоритма (ПГА) и рассматривается его современная реализация на языке C++ для персональных компьютеров.

Построение алгоритма и работа программы основываются на принципах МГУА, при этом используются: разделение исходного ряда данных на обучающую и проверочную выборки, оценка качества модели на проверочной выборке по глубине минимума внешнего критерия.

Алгоритм ищет в исходных данных зависимость вида [5,6]:

$$f(a, b, \omega, I) = a_0 + \sum_{i=1}^m [a_i \cos(\omega_i I) + b_i \sin(\omega_i I)] \quad (1)$$

где  $\cos \omega_1, \cos \omega_2, \dots, \cos \omega_m$  определяются как корни алгебраического уравнения

$$\cos(m\omega) - \alpha_1 \cos((m-1)\omega) - \dots - \alpha_{m-1} \cos \omega - (1/2)\alpha_m = 0 \quad (2)$$

коэффициенты которого  $\alpha_i$  должны удовлетворять систему линейных разностных уравнений

$$\sum_{j=1}^m (\alpha_j [f_{I+j} + f_{I-j}]) = f_I, \quad (3)$$

где  $\omega_i$  - частота колебаний ( $0 < \omega_i < \pi$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ );

$I$  - время, связанное с началом отсчета наблюдений;

$a_i, b_i$  - коэффициенты, на основе которых вычисляется амплитуда;

$a_0$  - свободный член (среднее выборки);

$m$  - количество частот.

Объясним значения левой части уравнения (3):

$$\sum_{j=1}^m (\alpha_j [f_{I+j} + f_{I-j}]) = \sum_{i=1}^m f_I 2 \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos(\omega_{ij})) . \quad (4)$$

Для того, чтобы выполнялось равенство (3), достаточно чтобы

$$2 \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos(\omega_{ij})) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Система уравнений (5) всегда имеет единственное решение. Тогда существуют такие константы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , которые для функции (1) при любом  $I$  выполняется равенство (3). В нашем случае оценками констант  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  являются оценки ортогональной регрессии для набора переменных  $t_{Ii}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , где  $t_{I0} = \sqrt{2} \cdot f_I$ ,  $t_{Ij} = f_{I+j} + f_{I-j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Оценки параметров  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  ищутся как корни уравнения

$$2 \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos(\omega_{ij})) = 1, \quad (6)$$

из промежутка  $[0, \pi]$ . Для решения уравнения (7) его с помощью формулы  $\cos \omega j = 2 \cos \omega (j-1) \cdot \cos \omega - \cos \omega (j-2)$  приводят к виду

$$P_m(\cos \omega) = 0, \quad (7)$$

где  $P_m$  - некоторый многочлен степени  $m$ .

Уравнение (7) решают относительно  $\cos \omega$ . Оценки коэффициентов  $a$ ,  $b$  ищут из требования минимизации функционала

$$\sum_{k=1}^N [a_i \cos(\omega_i k) + b_i \sin(\omega_i k) - x_k]^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где  $x_k$  -  $k$ -й член выборки данных.

Одна итерация алгоритма выглядит следующим образом: на основе обучающей выборки из таблицы исходных данных, составляется система разностных уравнений (3), вычисляются их коэффициенты методом квадратного корня и корни многочлена (7) по методу Ньютона, оцениваются частоты и амплитуды гармоник. На проверочной выборке модель ряда наблюдений вида (1) оценивается по глубине минимума внешнего критерия, например вида:

$$KR = \left[ \frac{\sum_{i=N_A+1}^{N_B} (x_i^P - x_i^M)^2}{\sum_{N_A}^{N_B} (x_i^P - x)^2} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

где  $x_i^P, x_i^M$  - исходные значения ряда и полученные путем моделирования соответственно;

$x$  - среднее ряда на проверочной выборке;

$N_A, N_B$  - количество значений ряда в учебной и проверочной выборках соответственно.

Количество итераций равно  $m$  и зависит от характера поведения внешнего критерия на проверочной выборке данных, то есть останавливается при достижении минимума внешнего критерия.

В связи с проблемами точности вычислений разных реализаций алгоритма, проводится тестирование программы полигармонического алгоритма МГУА на специально подобранных по сложности тестах.

Общая процедура тестирования заключается в том, что по заданным уравнениям с известным числом гармоник начисляется ряд значений, а потом, по этому ряду данных восстанавливается исходное уравнение. При этом важна не только точность воспроизведения

структуры исходного уравнения, но и точность с которой это воспроизведение проведено. Семь тестов, которые вошли в эту работу, отображают разные наборы частот и амплитуд, но надо иметь в виду то, что они не исчерпывают всю сложность естественных процессов, для анализа которых создавался алгоритм и программа.

В тестовых примерах приводятся исходное уравнение и график, который служит визуализацией и отображением физической сложности уравнения, а также таблица с параметрами, которые получены на основе моделирования по вычислительной программе ПГА.

**Пример 1.** Тестовый пример (1) представлен одной гармоникой и разными коэффициентами при COS и SIN и свободным членом равным 10. Как показано в таблице этот пример воспроизведен программой ПГА на 200 точках обучающей выборки с нулевой ошибкой.

$$F = 10.000000 + 4.000000 * \cos(0.350000 * i) + 2.000000 * \sin(0.350000 * i) \quad (10)$$

Таблица 1.

Результаты восстановления уравнения (10) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = 10.0000 (N = 200 NA = 200 m = 1)					
=====					
: Частота	: Период	: Амплитуда	: A[*cos]	: B[*sin]	: Фаза
=====					
0.350000	17.9520	4.4721	4.0000	2.0000	0.4636

**Пример 2.** Тестовый пример (2) представлен одной гармоникой и свободным членом равным 1.00. Это уравнение (11) воспроизведено программой ПГА на малой обучающей выборке из 10 точек с нулевой ошибкой (Таблица 2).

$$F = 1.000000 + 1.000000 * \cos(0.795400 * i) + 0.000000 * \sin(0.795400 * i) \quad (11)$$

Таблица 2.

Результаты восстановления уравнения (11) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = 1.000 (N = 10 NA = 10 m = 1)					
=====					
: Частота	: Период	: Амплитуда	: A[*cos]	: B[*sin]	: Фаза
=====					
0.795400	7.8994	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000

**Пример 3.** Тестовый пример (3), составлен из двух гармоник с одинаковыми частотами (m) и свободным членом равным 1.33. Как показано в таблице 3, уравнение (12) воспроизведено программой ПГА на 100 точках обучающей выборки (NA) с нулевой ошибкой.

$$F = 1.330000 + \\ + 1.000000 * \cos(0.544000 * i) + 0.000000 * \sin(0.544000 * i) + \\ + 0.000000 * \cos(0.744000 * i) + 1.000000 * \sin(0.744000 * i); \quad (12)$$

Таблица 3.

Результаты восстановления уравнения (10) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = 1.3300 (N = 100 NA = 100 m = 2)					
: Частота :	Период :	Амплитуда :	A[*cos] :	B[*sin]	: Фаза :
0.544000	11.5500	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.744000	8.4451	1.0000	0.0000	1.0000	1.5708

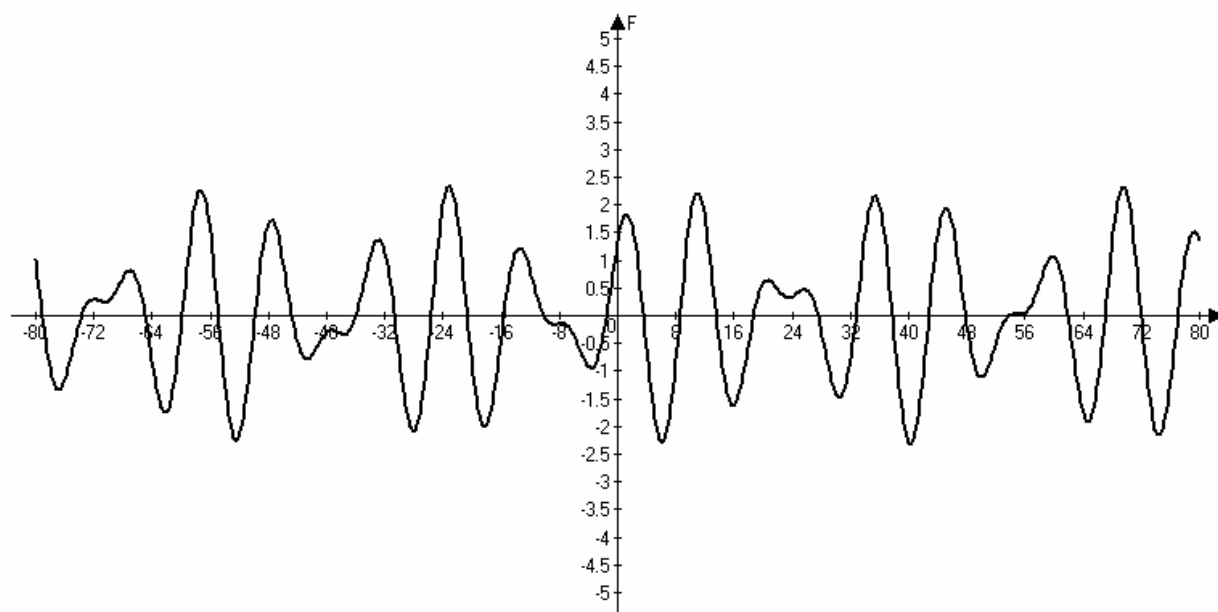


Рис.1. График визуализации тестового примера (12)

**Пример 4.** Тестовый пример (4) составлен из трех гармоник с разными частотами и свободным членом равным -5. Как показано в таблице 4, уравнение (13) воспроизведено программой ПГА на 200 точках обучающей выборки с удовлетворительной точностью. В этом примере использованы частоты близкие к 0,  $\pi$ ,  $\pi/2$ .

$$\begin{aligned}
 F = & -5.000000 + \\
 & + 0.000000 * \cos(0.000001 * i) + 1.000000 * \sin(0.000001 * i) + \\
 & + 0.000000 * \cos(0.300000 * i) - 14.000000 * \sin(0.300000 * i) + \\
 & + 4.000000 * \cos(1.570796 * i) + 0.000000 * \sin(1.570796 * i) + \\
 & + 0.000000 * \cos(3.141590 * i) - 7.000000 * \sin(3.141590 * i);
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Таблица.4.

Результаты восстановления уравнения (10) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = -4.9999 (N = 200 NA = 200 m = 4)					
=====					
: Частота :	Период :	Амплитуда :	A[*cos]	B[*sin]	Фаза :
=====					
0.300000	20.9440	14.0000	-0.0000	-14.0000	-1.5708
1.570796	4.0000	4.0000	4.0000	-0.0000	-0.0000
3.135809	2.0037	0.0037	-0.0002	-0.0037	-1.6165

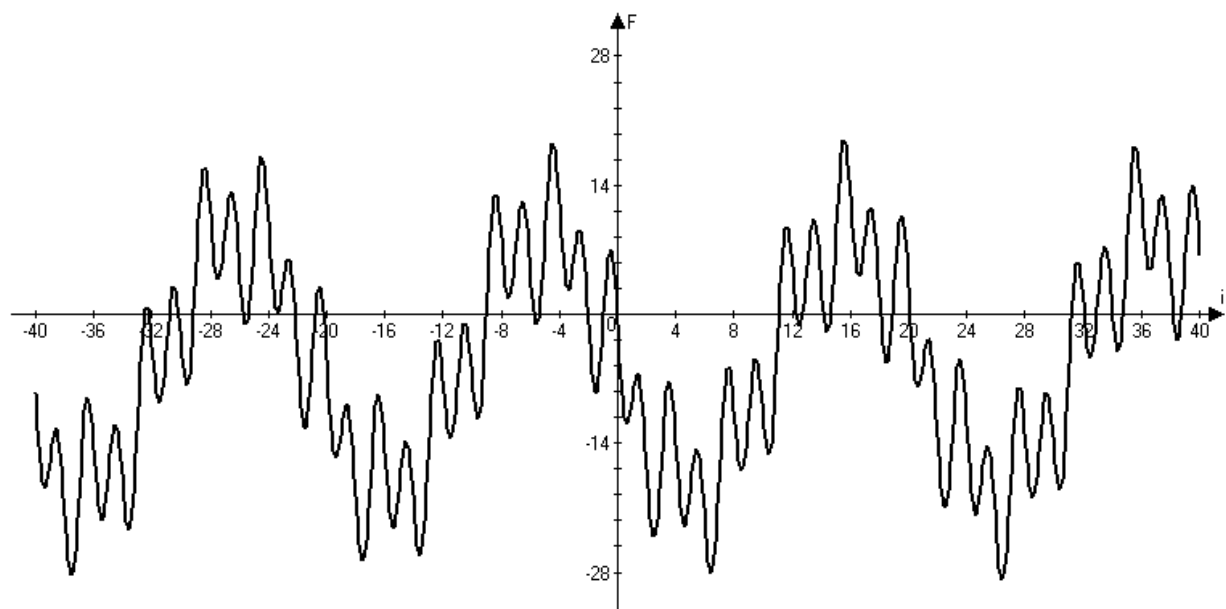


Рис.2. График визуализации тестового примера (13)

**Пример 5.** Тестовый пример (5) составлен из пяти гармоник с разными частотами и свободным членом равным 0. Как показано в таблице 5 этот пример воспроизведен программой ПГА на 200 точках обучающей выборки с нулевой ошибкой.

$$\begin{aligned}
 F = & 0.000000 + \\
 & + 0.000000 * \cos(0.300000 * i) - 1.000000 * \sin(0.300000 * i) + \\
 & + 30.000000 * \cos(0.600000 * i) + 0.000000 * \sin(0.600000 * i) + \\
 & + 0.000000 * \cos(1.200000 * i) - 30.000000 * \sin(1.200000 * i) + \\
 & + 80.000000 * \cos(2.700000 * i) + 0.000000 * \sin(2.700000 * i) + \\
 & + 0.000000 * \cos(3.110000 * i) - 80.000000 * \sin(3.110000 * i);
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Таблица.5.

Результаты восстановления уравнения (14) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = 0.0000 (N = 200 NA = 200 m = 5)

: Частота : Период : Амплитуда : A[\*cos] : B[\*sin] : Фаза :

0.300000	20.9439	1.0000	0.0000	-1.0000	-1.5708
0.600000	10.4720	30.0000	30.0000	0.0000	0.0000
1.200000	5.2360	30.0000	0.0000	-30.0000	-1.5708
2.700000	2.3271	80.0000	80.0000	0.0000	0.0000
3.110000	2.0203	79.9999	0.0009	-79.9999	-1.5708

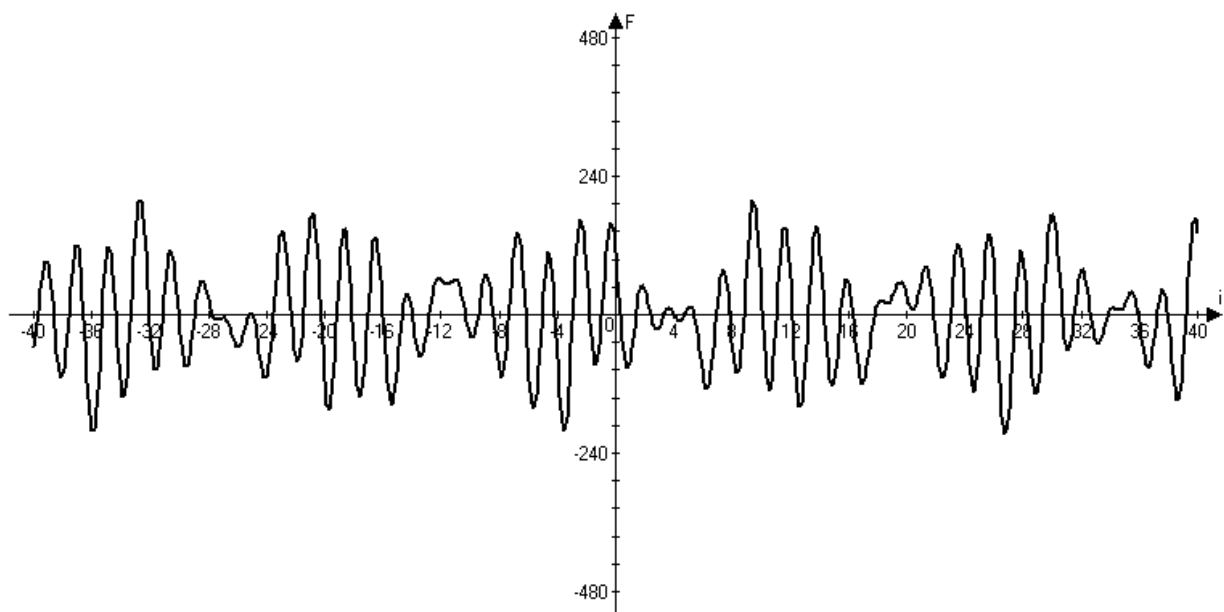


Рис.3. График визуализации тестового примера (14)

**Пример 6.** Тестовый пример (6) представлен гармоникой и свободным членом равным 1 и нулевым коэффициентом при SIN. Как показано в таблице этот пример воспроизведен программой ПГА на 200 точках обучающей выборки с нулевой ошибкой.

$$F = 1.000000 + 1.000000 * \cos(0.523600 * i) + 0.000000 * \sin(0.523600 * i) \quad (15)$$

Таблица.6.

Результаты восстановления уравнения (15) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = 1.0000 (N = 200 NA = 200 m = 1)					
=====					
: Частота	: Период	: Амплитуда	: A[*cos]	: B[*sin]	: Фаза :
=====					
0.523600	12.0000	1.0000	1.0000	-0.0000	-0.0000

**Пример 7.** Тестовый пример (7) составлен из десяти гармоник с разными частотами и свободным членом равным 45.16. Как показано в таблице (7) этот пример воспроизведен программой ПГА на 200 точках обучающей выборки с удовлетворительной точностью. Особенность этого примера является то, что приведенное уравнение было получено на фактических данных реального процесса и тем самым воссоздает возможную сложность процессов, которые будут моделироваться с помощью ПГА.

$$F = 45.160000 - 7.730000 * \cos(0.110000 * i) - 5.840000 * \sin(0.110000 * i) + 5.210000 * \cos(0.150000 * i) + 0.848000 * \sin(0.150000 * i) + 9.440000 * \cos(0.490000 * i) + 5.302000 * \sin(0.490000 * i) + 3.640000 * \cos(0.510000 * i) + 4.210000 * \sin(0.510000 * i) + 4.660000 * \cos(0.520000 * i) + 4.649000 * \sin(0.520000 * i) + 1.060000 * \cos(0.570000 * i) + 19.700001 * \sin(0.570000 * i) + 6.700000 * \cos(0.590000 * i) + 9.292000 * \sin(0.590000 * i) + 11.400000 * \cos(0.630000 * i) + 7.680000 * \sin(0.630000 * i) + 3.190000 * \cos(0.670000 * i) + 10.300000 * \sin(0.670000 * i) + 1.710000 * \cos(0.700000 * i) + 4.725000 * \sin(0.700000 * i); \quad (16)$$

Результаты восстановления уравнения (15) полигармоническим алгоритмом

Свободный член = 45.2841 (N = 200 NA = 200 m = 15)

: Частота : Период : Амплитуда : A[\*cos] : B[\*sin] : Фаза :

0.110059	57.0891	9.5489	-7.3856	-6.0526	-2.4551
0.150071	41.8682	5.5007	5.4178	0.9509	0.1737
0.490960	12.7978	9.1067	-9.1006	0.3317	3.1052
0.523455	12.0033	2.9702	-1.1128	-2.7539	-1.9548
0.574582	10.9352	6.0096	-3.8058	-4.6509	-2.2566
0.627346	10.0155	9.3345	6.9464	-6.2354	-0.7315
0.669377	9.3866	10.6606	-0.2386	10.6580	1.5932
0.699893	8.9774	4.9226	-2.0342	4.4826	1.9968
1.204492	5.2165	0.0592	-0.0115	0.0580	1.7668
2.772599	2.2662	0.0483	-0.0333	-0.0350	-2.3321
2.057358	3.0540	0.0279	-0.0109	-0.0257	-1.9733
3.041246	2.0660	0.0683	-0.0681	-0.0044	-3.0769
2.380885	2.6390	0.0713	-0.0629	0.0337	2.6497
1.761410	3.5671	0.0629	-0.0498	-0.0385	-2.4842
1.787922	3.5142	0.0040	0.0035	0.0021	0.5388

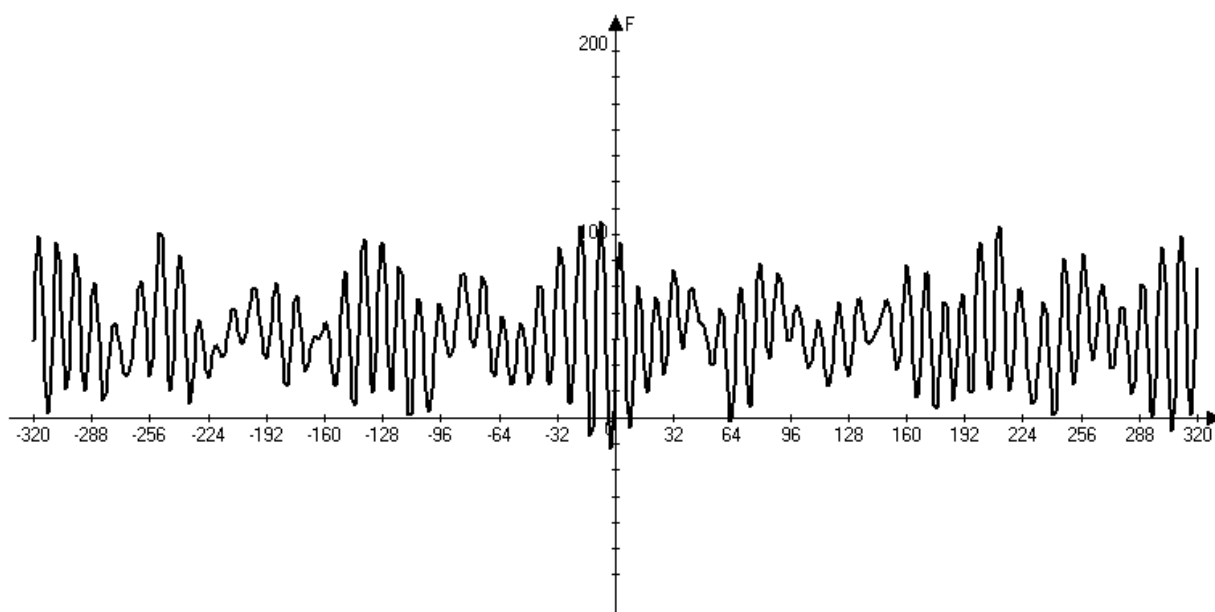


Рис.4. График визуализации тестового примера (16)



Дальше покажем использование полигармонического алгоритма МГУА для тестового моделирования некоторых гидрологических процессов, периодическая повторяемость которых проявляется в сезонных и многолетних колебаниях уровней воды. Выделение гармонических составляющих в начальном ряде наблюдений за некоторый период служит основой для поиска генетической связи колебаний уровней вод с факторами, которые возможно их вызывают и для прогнозов. Отметим, что ПГА позволяет выделить гармоники с некратными частотами, которые важны при анализе колебательных процессов в которых отсутствует точная периодичность, которая характерна для большинства естественных процессов. Поэтому предпочтительнее использовать гармоничный ряд с некратными частотами перед гармоническим рядом Фурье.

### **Полигармонический анализ многолетних колебаний пьезометрического уровня водоносного горизонта.**

Выделение гармонических составляющих в исходном ряде многолетних наблюдений за пьезометрическим уровнем водоносного горизонта, является основой для поиска генетической связи колебаний уровня подземных вод с другими факторами, возможно, их вызывающими, а также прогнозов [3].

Выделение по МГУА полигармонического тренда с некратными частотами в колебаниях пьезометрического уровня водоносного горизонта показано на примере анализа 240 среднемесячных наблюдений. В процессе работы алгоритма в исходном ряде наблюдений выделен тренд, который состоит из двух гармоник с периодами 119 лет и 1 год (Таблица 8).

Гармоники выделяются по точкам обучающей последовательности, а выбор лучшего тренда осуществляется по минимуму критерия (9) на проверочной последовательности данных.

Таблица 8.

Гармоники, которые составляют тренд пьезометрического уровня водоносного горизонта

Частота	Коэффициенты		Период, год	Амплитуда, м
	a	b		
0,0044	-0,6839	0,2890	119	0,74
0,5231	0,1144	0,0320	1	0,12

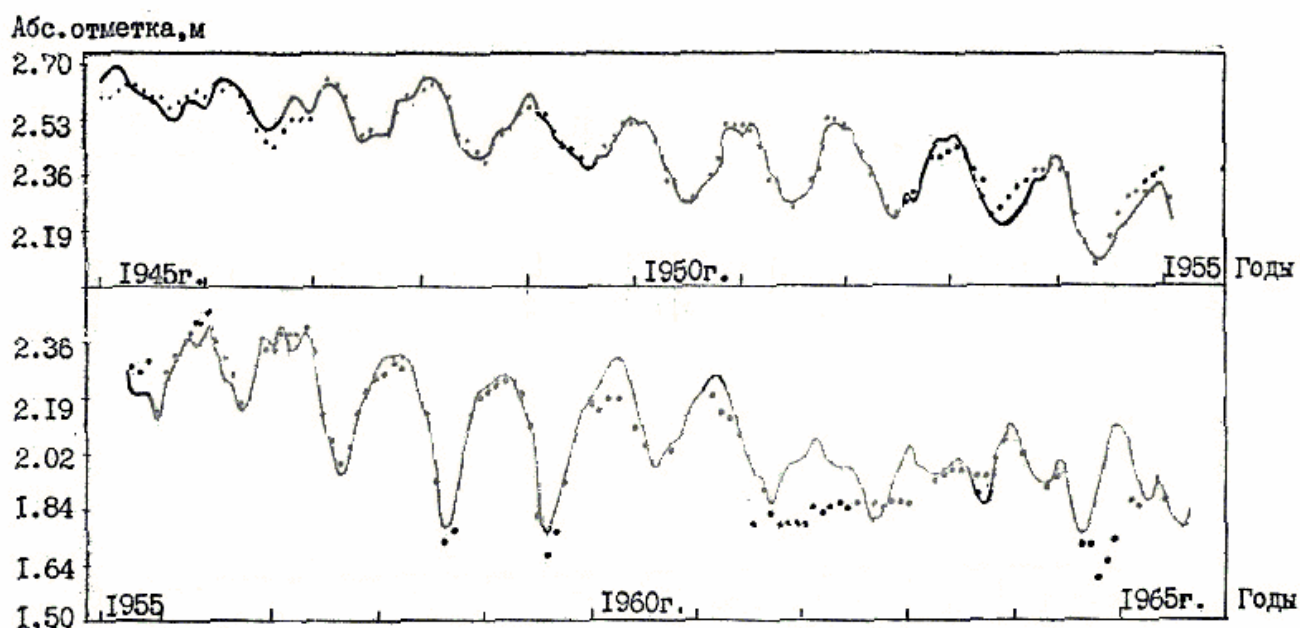


Рис.5. График гармонического тренда пьезометрического уровня водоносного горизонта

#### Полигармонический анализ многолетних рядов температуры воздуха и осадков.

Колебательный характер многолетних рядов наблюдений за температурой воздуха и осадками дает возможность использовать ПГА для выявления причин и оценки параметров этих процессов [4]. ПГА позволяет разложить исходный ряд наблюдений на составные (гармоники), оценить их параметры (частоту и амплитуду), вычислить период и фазу, а также связать эти параметры с известными или ожидаемыми влияниями на атмосферу.

Рассматриваются многолетние ряды наблюдений за температурой воздуха и осадками, которые полученные на метеостанции г. Киева за 127 лет (1856-1982г.г., Рис.6 и 7).

Визуальный анализ многолетних рядов наблюдений за температурой воздуха и осадками не разрешает обнаружить какие-нибудь закономерности. Для поиска скрытых закономерностей используется ПГА на основе приведенной методики. Полученные параметры моделей приведенные в таблицы 9.

Анализ данных показывает, что в изменении температуры воздуха и осадков выделена гармоника с периодом 3 года, и достаточно весомой амплитудой. Гармоника с наибольшей амплитудой для температуры воздуха имеет период 4.7 года, которые на 1.63 превышает период гармоники с максимальной амплитудой для осадков. Характерно, что гармоники ряда температуры воздуха с частотами 2,2; 2,7; 2,8 (периоды от 2.3 до 2.9 года) могут обусловить явление биения. На это указывает и то, что спектр температуры воздуха в границах частот от 2.2 до 2.8 "рассыпается" на три близкие частоты (2.2; 2.7; 2.8) с равными амплитудами (0,2). Менее выразительно это явление при анализе многолетнего ряда наблюдений за осадками, амплитуды в спектре которого меняются в незначительных границах - от 2.37 до 2.65.

На этой основе можем сделать вывод, что полигармоничность многолетнего ряда наблюдений за осадками в 2 раза меньше температурного, на что указывает значение критерия(9), равное 0.5. Приблизительно по семь значимых гармоник выделено в обоих рядах наблюдений за температурой воздуха и осадками. Длиннопериодические гармоники в многолетнем ряде температуры воздуха 13, 7; 12, 2; 6, 9 лет, а осадков: 21; 11; 9.6 лет. В рядах наблюдений за осадками и температурой воздуха выделено только по одной гармонике, абсолютно совпадающих по частоте (частота 1.8, период 3.4 лет). В обоих спектрах эта гармоника занимает второе место по амплитуде.

Таблица 9.

Параметры полигармонических моделей температуры воздуха и осадков

Температура воздуха в градусах Цельсия		Осадки в мм	
Свободный член (a) = 7,17; КР = 0,24		Свободный член (a) = 49,62; КР = 0,50	
Амплитуда температуры	Период, года	Период, года	Амплитуда, мм
0,18	13,67	21,20	2,08
0,22	12,24	11,04	2,38
0,13	6,93	9,57	2,67
0,32	4,70	5,66	2,40
0,13	4,34	3,68	2,15
0,27	3,38	3,40	3,13
0,20	2,86	3,07	3,37
0,20	2,33		
2,20	2,28		

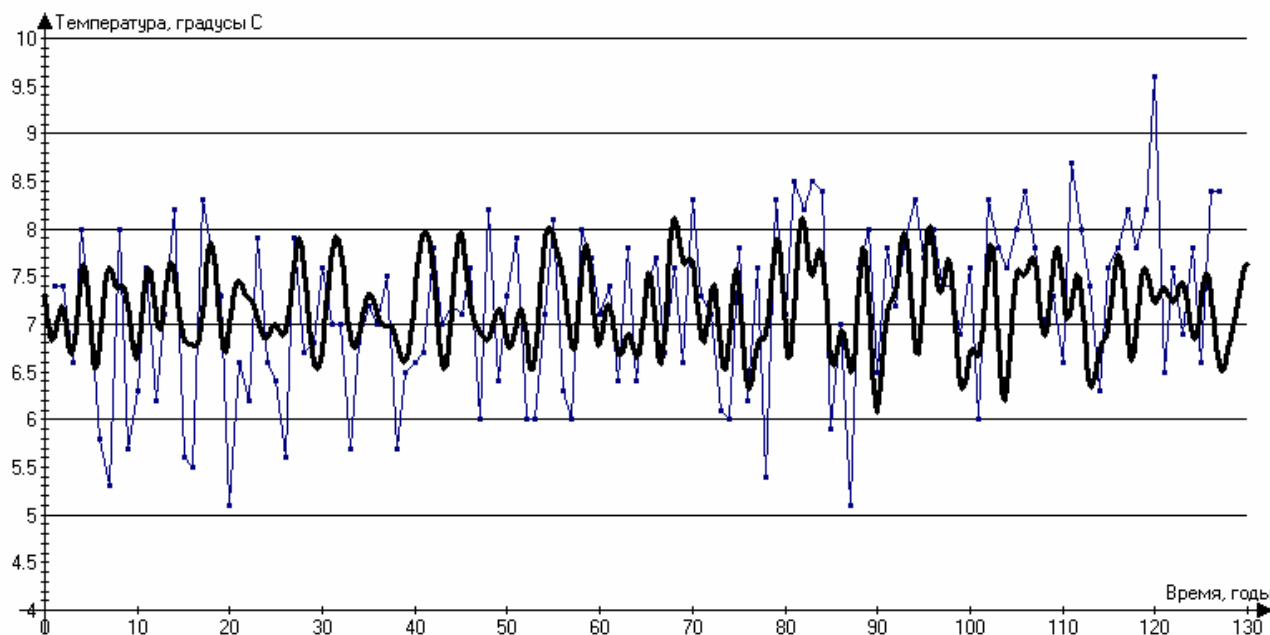


Рис.6. График многолетних колебаний температуры воздуха; тонкая линия — измеренное значение; толстая линия — результат моделирования.

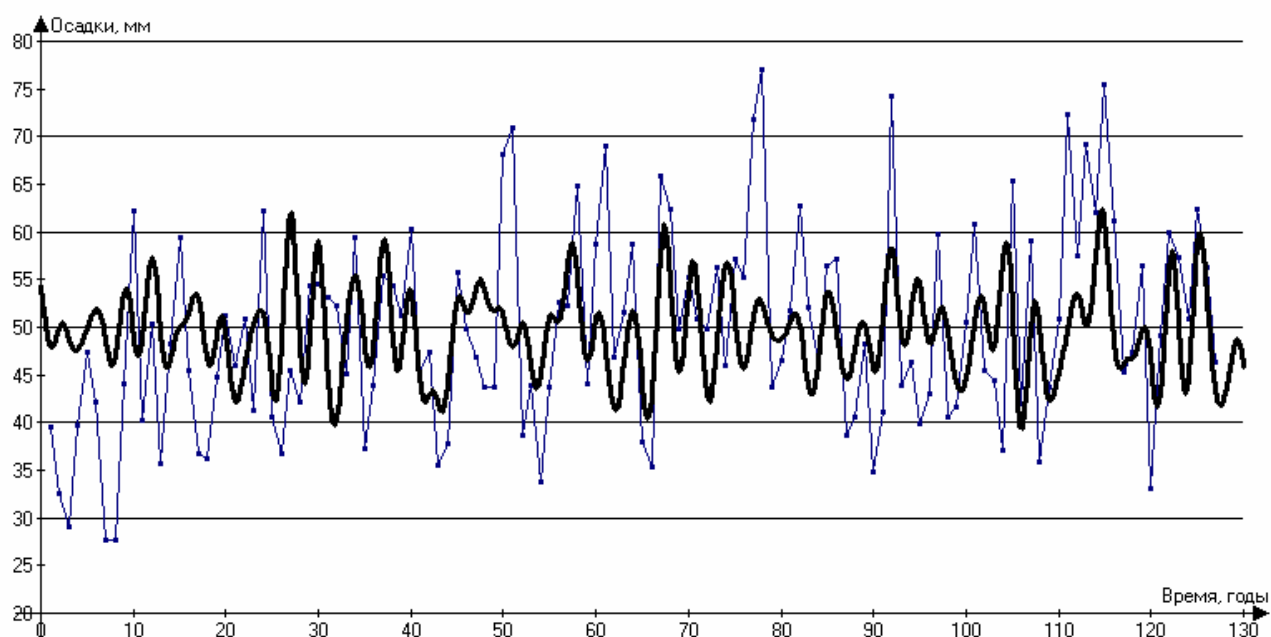


Рис.7. График многолетних колебаний осадков; тонкая линия – измеренное значение; толстая линия – результат моделирования.

### Заключение

Предложенная методика тестирования полигармонического алгоритма МГУА показала его особенности и достаточную точность при вычислениях. На нескольких примерах показана возможность применения ПГА для моделирования сложных природных процессов. Представлен набор тестов для оценки качества аналогичных программных средств.

## С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Ивахненко А.Г., Высоцкий В.М., Чеберкус В.И. Долгосрочное прогнозирование колебательных процессов при помощи выделения гармонического тренда оптимальной сложности по критерию баланса переменных // Автоматика.-1975.-№ 1.- С. 23-31.
2. Ивахненко А.Г., Кротов Г.И., Чеберкус В.И. Многорядный алгоритм самоорганизации долгосрочных прогнозов (на примере экологической системы оз.Байкал). –Автоматика, 1980, №4, с.28-47.
3. Ивахненко А.Г., Ивахненко М.А., Кошулько А.И. Индуктивные методы самоорганизации моделей на ЭВМ и сплайны в гидрогеологических исследованиях // Водные ресурсы, № 4, 1985.С. 76-85.
4. Кошулько А.И., Попков Н.В., Юрачковский Ю.П. Полигармонический анализ многолетних рядов температуры воздуха и осадков//Анализ и прогноз многолетних временных рядов.- Сб.научных трудов/ВАСХНИЛ.- Сиб.отделение Сибниизхим, Новосибирск,1988.- № 6.- С. 45-53.
5. Юрачковский Ю.П., Чеберкус В.И. Самоорганизация моделей полигармонических полей.- Автоматика, 1981, №1, с.37-45.
6. Юрачковский Ю.П., Попков Н.В. Один из подходов к оцениванию параметров в алгоритмах моделирования полигармонических процессов. //Анализ и прогноз многолетних временных рядов.- Сб.научных трудов/ВАСХНИЛ.- Сиб.отделение Сибниизхим, Новосибирск,1988.- № 6. - С. 17-21.