

А. Г. ИВАХНЕНКО

**ДОЛГОСРОЧНОЕ
ПРОГНОЗИРОВАНИЕ
И УПРАВЛЕНИЕ
СЛОЖНЫМИ
СИСТЕМАМИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ТЕХНІКА»
КИЕВ - 1975

УДК 62—50.23

Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.
И в а х н е н к о А. Г., «Техніка», 1975, 312 стр.

В книге излагается новый подход к математическому моделированию сложных систем, основанный на принципе эвристической самоорганизации. Согласно этому принципу математическая модель оптимальной сложности соответствует минимуму некоторого критерия, называемого критерием селекции. В качестве такого критерия в одних задачах используются критерии регулярности и несмещенности модели, в других — критерий баланса переменных. Устанавливается неизвестное ранее новое свойство модели, состоящее в том, что при постепенном повышении ее сложности указанные критерии проходят через минимальные значения. Машина находит глобальный минимум и тем самым указывает единственную модель оптимальной сложности при весьма малом объеме априорной информации. Человек должен только целесообразно выбрать эвристический критерий селекции соответственно типу задачи. Таким образом, метод самоорганизации основан на переборе моделей с постепенным их усложнением до нахождения указанного минимума. Методы перебора не требуют привлечения каких-либо сведений из математической статистики.

Объем полного перебора уменьшается при помощи алгоритмов многорядной селекции подобно тому, как это практикуется при селекции растений или животных. Метод Группового Учета Аргументов (МГУА) реализует ряд алгоритмов постепенного усложнения модели по правилам многорядной селекции.

Даны примеры применения МГУА для решения задач долгосрочного прогноза, распознавания образов, идентификации характеристик и управления с оптимизацией прогноза при малом числе исходных данных (всего 10-20 точек наблюдения процесса).

Книга рассчитана на инженеров, работающих в области технической кибернетики и интересующихся практическими приложениями математического моделирования для решения указанных выше задач.

Табл. 55, ил. 54, библиогр. 90.

Эта книга статьи - на сайте <http://www.gmdh.net>

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи
Заведующий редакцией инж. З. В. Божко

И — 30501—197
М202 (04)-75 — 12-75

(С) Издательство «Техніка», 1975

Построение математической модели сложного объекта или процесса требуется для решения всех основных задач технической кибернетики: прогнозирования, распознавания образов и автоматической классификации, идентификации характеристик, а также для цели автоматического оптимального управления. Математической моделью в этих задачах может служить либо система уравнений, описывающих объект, либо, в более сложном случае, ряд систем уравнений, связанных условными логическими переходами, т. е. то, что обычно называется алгоритмом сложного объекта.

В данной книге ограничимся только первой, более простой формой математических моделей. В ней рассматриваются так называемые прямые методы получения таких моделей в виде системы уравнений с запаздывающими аргументами, по малому числу экспериментальных точек наблюдения.

При этом рассматривается новое направление в кибернетике — *теория самоорганизации*. Оно призвано еще больше повысить роль кибернетики в жизни людей и привести ее к новому расцвету. Уже сейчас проникновение кибернетики во все сферы человеческой деятельности настолько велико, что сомневаться во все возрастающем ее значении не приходится. Процесс же этот будет развиваться до тех пор, пока на Земле не установится идеальный, гармоничный симбиоз человека и вычислительных машин.

Однако сейчас все реже ученые высказывают точку зрения, что машины могут взять на себя творческие функции человека. Мы не должны упреждать события и прежде, чем повести разговор о будущем человека и машины, посмотрим, как обстоят дела в кибернетике сегодня. Не умаляя ее значения в народнохозяйственной жизни страны, нужно отметить, что лишь одно направление, одна ветвь кибернетики, получило свое достойное развитие. Развитие так называемого «детерминистического» направления и слабое развитие «самоорганизации» внесло некоторый перекос в общее развитие

фундаментальных идей Норберта Винера. Поэтому кибернетика пока не может подняться выше, так сказать, своих подручных — сравнительно простых функций. Велики ее достижения при разработке, например, расписаний движения поездов, прокладки дорог, оптимального размещения предприятий и тому подобных задач, решение которых получается единственным, строгим и неоспоримым. С увеличением сложности задачи появляется множественность вариантов решения, а достоверность каждого из них уменьшается.

Известна, например, неэффективность многих математических моделей сложных объектов. Принципы прогнозирования будущего также пока еще малоэффективны. Когда предпринимаются такие попытки решения сложных задач, то кибернетические модели могут доказать как одну, так и противоположную точки зрения. Достаточно подобрать соответствующую априорную информацию, всецело зависящую от субъективных исходных предположений автора модели.

В результате указанного выше перекоса математическое обеспечение вычислительных машин для решения сложных задач несовершенно. Научно-техническая революция и неуклонное усложнение человеческой жизнедеятельности требует внедрения новых методов решения задач и, в частности, большего «доверия» к машине, в соответствии с принципом эвристической самоорганизации. До последнего времени мы не могли позволить машине «думать» самой.

Существует определенный предел способностей любого индивидуума принимать правильные решения и не ошибаться при постепенном усложнении задачи. До сих пор считалось, что аналитические возможности человека всеильны, и точные науки построены на этой уверенности. Она вполне оправдана и будет оправдываться при решении многих достаточно важных задач. Однако научно-техническая революция поставила задачи необычайной сложности, где аналитические возможности человека уже недостаточны. В конце XX века человек будет свидетелем беспрецедентного поединка науки со стихией новых проблем, возникающих уже теперь перед человеком в связи с загрязнением среды, нехваткой чистой воды и чистого воздуха, необходимостью управлять «психологическим климатом», неслыханным ростом городов и т. п.

Немудрено, что глобальность задач приводит многих ученых в растерянность. Некоторые ученые на Западе считают утопией, будто человечество найдет решение возникшим в конце XX века проблемам. Отчаяние этих «антиутопистов» объясняется тем, что они не верят в возможность людей управлять «стихиями» в достаточно короткие сроки.

Человечество сейчас живет в эпоху «взрывов». Этот термин применим ко многим сторонам человеческой жизни: «взрыв народонаселения», «взрыв городов», «взрыв информации», «взрыв числа водо-

хранилищ». Все это несет человеку новые и новые глобальные проблемы. Так, «взрыв информации» означает, что количество информации, которое приходится перерабатывать человеку, удваивается каждые пять лет; народонаселение Земли удваивается приблизительно через каждые 25 лет и т. д.

Все науки сейчас приняли прогнозирующий характер: технические науки и экономика, биология, социология и даже искусство. Это придает нашей эпохе новый отпечаток, новый характер. Человек до сих пор никогда еще не интересовался тем, что его ожидает, так сильно, как сейчас. Благодаря электронным вычислительным машинам (ЭВМ) можно прогнозировать, а следовательно, обсуждать, обдумывать будущее и готовиться к нему.

Не будем уточнять, что такое *простая* и что такое *сложная* задача. О сложности задачи можно судить по единогласию ученых. Если ученые все приходят к одному решению — то задача проста. Если голоса расходятся — то она сложная. Большинство задач, которые стоят теперь перед человечеством, относятся к сложным. Это задачи, например, допустимого (увы, неизбежного!) загрязнения среды (озер, морей, воздушного пространства), прогнозирования случайных процессов управления экономикой и многие другие. Так, например, судьба Балтийского моря неизвестна. Содержание кислорода в морской воде за последние 20—30 лет в среднем непрерывно падает. Часть ученых видят в этом близкую гибель биоценозов моря; другие утверждают, что срок наблюдения мал, что такие падения содержания кислорода возможно были уже в прошлом и, следовательно, ничего особенного с морем не происходит. Прогнозы расходятся, хотя достоверный прогноз крайне необходим, чтобы принимать какие-то весьма серьезные решения.

Найти авторитетного арбитра, объективно и, по возможности, точно дающего единственное решение поставленной задачи, — так выглядит главная проблема современной кибернетики, решить которую ученым необходимо скорейшим образом.

Новые возможности откроет в ближайшие годы направление, называемое «теорией самоорганизации». Речь идет о необходимости пересмотра коренных принципов подхода современной кибернетики к решаемым задачам. Так сложилось, что кибернетики часто привносят в программы вычислительных машин свои «личные», жесткие причинно-следственные связи, не давая машине никакой «свободы выбора» и заставляя ее слишком быстро искать «жесткое решение».

И хотя наука о самоорганизации математических моделей на ЭВМ находится в самом начале своего развития, ученым уже теперь стала ясна опасность постоянного «жесткого планирования». По мнению английского кибернетика Д. Габора, решения нужно принимать так, чтобы оставлять «свободу выбора решений» для тех, кто будет принимать следующее решение в последующий момент времени.

Например, применительно к планированию городов это означает необходимость одновременной разработки ряда планов развития на все возможные случаи хода объективного процесса роста населения с тем, чтобы можно было переходить с одного плана на другой, если «непредвиденные» обстоятельства потребуют того. Планирование и даже строительство должны быть гибкими, многовариантными, готовыми учесть последствия. Таковыми же должны быть и программы ЭВМ.

«Детерминисты» считают вычислительную машину послушной рабой, которая может только выполнять их приказания. Но ЭВМ при условии ее «раскрепощения» и предоставления ей свободы выбора сможет открывать закономерности самых сложных процессов и вырабатывать алгоритмы оптимального управления ими.

При отсутствии свободы выбора машина действительно превращается в «большой арифмометр». Только машина, которой предоставлена достаточная свобода выбора решений, программируемая по принципам самоорганизации математических моделей, может быть арбитром, указывающим объективное решение.

В некотором смысле машина становится «умнее» человека. Ведь сейчас детерминистические модели учитывают только то, что они содержат. Если какой-либо фактор не участвует среди аргументов модели, то последняя его действительно не учитывает. По-иному дело обстоит в моделях, синтезируемых по методу самоорганизации. Экспериментальные точки независимо от уровня знаний человека содержат в себе информацию о самых разнообразных факторах. Например, данные о загрязнении водохранилища за какое-то время несут в себе информацию и о механизме самоочищения водоема. Можно получить модель самоочищения, по сути не зная заранее его механизма. Синтез модели по методам самоорганизации не требует глубокого понимания объекта. Машина в этом смысле в самом деле становится «умнее» своего заказчика, задающего лишь весьма общий, но целесообразно выбранный критерий селекции модели.

При моделировании по принципу самоорганизации нет незаменимых аргументов. Модель может быть построена на различных наборах аргументов, что не скажется на объективности прогноза, но при этом должна быть обеспечена достаточная свобода выбора последующих решений. Последнее исключает необходимость использования переменных, труднодоступных для измерения или не поддающихся формализации.

Наука о процессах самоорганизации находится в начале своего развития. Многие процессы, окружающие человека, можно назвать самоорганизацией. Например, удивительному процессу самоорганизации человечество обязано возникновением живой природы, культуры и т. п. Другими словами, теория самоорганизации должна объяснить многие стихийные процессы в самых различных формах

проявления жизни, Норберт Винер связывал понятие самоорганизации с ритмами, т. е. с периодическим воздействием на массу однородных элементов. Другие ученые видели в процессах кристаллизации или утряски (например, при образовании так называемых «фигур Лиссажу» в акустике) прообраз самоорганизации.

Организация измеряется степенью снижения энтропии — меры дисперсности объекта. Классическим примером самоорганизации является образование кристаллов, например, снежинок из дисперсной массы тумана.

Самоорганизация есть процесс организации, происходящий вовсе без участия человека или при его весьма малом участии. Иногда допускается, чтобы «спусковой крючок» процесса самоорганизации был в руках человека. Реальную возможность изучения процессов самоорганизации принесли с собой вычислительные машины.

В современной теории самоорганизации ставится сравнительно скромная задача: требуется разработать методы программирования вычислительной машины, при которых она может решать задачи почти без указания человека, точнее — с минимумом априорной информации (в которой и заключаются указания человека — программиста). Метод решения должен быть универсальным для всех задач. Человек практически задает машине только небольшую таблицу экспериментальных данных для ряда возможных наблюдаемых величин (тем самым указывая так называемую «среду» решения задачи) и, главное, — критерий селекции математической модели сложного объекта. Самоорганизация направлена на всемерное уменьшение объема априорной информации, которая требуется для синтеза прогнозирующей и управляющей модели. Машина синтезирует модель, как указывалось, по небольшой части переменных и по небольшому числу экспериментальных данных. Она по-прежнему действует по указанию человека, но язык диалога «человек — машина» переходит как бы на более высокий уровень абстракции.

Опыт решений аналогичных друг другу конкретных задач, какими бы сложными они не были, будет заложен в критерий выбора модели или критерий управления. Человек только указывает машине, что ему требуется получить от модели: точность прогноза, несмещенность коэффициентов модели или баланс переменных и т. д. В старой шутке говорилось: «Зачем знать географию, если существует извозчик?» Действительно, роль человека при использовании самоорганизации — это роль седока: «Дай самый точный прогноз по имеющимся данным», — и машина послушно синтезирует фильтр оптимальной сложности и выдает наиболее точный прогноз. Априорную информацию, вводимую в машину, легко согласовать с людьми самых разных точек зрения. Кто же будет возражать против того, что прогноз должен быть точным, а управление — удовлетворять максимуму критерия оптимизации прогноза? Вот

почему, как уже подчеркивалось, даже экономику в масштабах государства или группы стран можно будет прогнозировать на сравнительно небольших машинах с минимальным объемом априорной информации и по небольшому объему экспериментальных данных.

Например, для прогноза стока воды р. Днепр были указаны машине данные о стоке за сто лет и задан критерий: «Прогноз должен быть самым точным». Как мы видим, среди такой информации нет ничего, что можно было бы оспаривать или предлагать другие варианты постановки задачи. Это обеспечивает неоспоримость прогноза, его объективность.

При детерминистическом подходе к построению математических моделей вычислительная машина рассматривается лишь как средство для быстрого счета пусть даже и по весьма сложным алгоритмам. Самоорганизация означает не только «раскрепощение» машины, но и обуславливает своеобразную позицию человека по отношению к машине. Примерно эту позицию можно выразить так: «Я знаю, что я ничего не знаю, пусть машина разберется во всех исходных данных сама, при минимальном моем участии. Я только укажу ей конечные цели решения задачи». Такая постановка задачи оказывается весьма плодотворной именно при рассмотрении сложных процессов, где человек ошибается значительно чаще, чем в простых.

Человек должен предоставить максимальную свободу вычислительной машине. Так всадник, потеряв дорогу, предоставляет свободу действий своему коню. Машина сама может уже многому научить человека, особенно в области прогнозирования случайных процессов.

Для детерминистического подхода к решению задач синтеза математических моделей характерно утверждение: «чем сложнее модель — тем она точнее». Добавление нового структурного элемента в схему модели (или слагаемого в уравнении) всегда только повышает точность.

Противоположное утверждение характеризует подход самоорганизации: существует единственная модель оптимальной сложности, определяемая по принципу самоорганизации. Различие подходов очевидно. Для сложных процессов более эффективным оказывается подход самоорганизации. Напомним, что к детерминистическому подходу следует отнести как детерминированный, так и вероятностный аппараты, так как оба они основаны на анализе причин и следствий [33]. Поэлементные уравнения в том и другом случае изобретает человек.

Согласно теории самоорганизации универсальный метод решения задач - *перебор* (х. е. последовательное опробование) различных вариантов математических моделей и их комбинаций* при постепен-

* Перебор комбинаций уравнений требуется только при использовании критерия баланса переменных.

ном увеличении сложности. Оптимальное решение находится при сложности модели, адекватной сложности объекта («закон адекватности» объекта и регулятора).

Перебор моделей по тому или другому критерию селекции может быть полным (т.е. начинаться с самой простой линейной модели от одного аргумента и кончаться такой сложностью, которая явно завышена) или неполным, рационализированным. Полный перебор не требует разработки никакой теории: он применим к любым объектам, линейным и нелинейным, стационарным и нестационарным. При нем вообще никакие сведения из математической статистики не нужны. Разработка теории требуется только при сокращении, рационализированном переборе. Здесь необходимо выяснить условия, когда не будет упущен результат, который можно было бы получить при полном переборе.

Основное открытие в новой теории самоорганизации состоит в установлении следующего принципа: при постепенном повышении сложности математической модели некоторые критерии сначала снижаются, доходят до минимума, а затем начинают повышаться. Машина при помощи перебора способна находить минимум критерия. Это и дает возможность передать вычислительной машине процесс нахождения *единственной модели оптимальной сложности*, т. е. реализовать на ней общую идею самоорганизации модели сложного объекта. Роль человека при этом довольно скромна: он указывает машине только критерий выбора и среду решения задачи. Не будучи специалистом, например в гидрологии рек, можно, пользуясь принципом самоорганизации, получить наиболее точный прогноз количества воды в реке (скажем, через десять лет). Изучение объекта необходимо лишь в такой степени, чтобы грамотно выбрать достаточно полный список наблюдаемых переменных — «среду» решения задачи и указать универсальный критерий селекции модели оптимальной сложности.

Рассмотрим более подробно синтез прогнозирующей модели при помощи полного перебора уравнений. Все имеющиеся экспериментальные точки разбиваются на две части, называемые *обучающей* и *проверочной* последовательностями. Проследим характер изменения среднеквадратичных ошибок Δ (об) (подсчитана на точках обучающей последовательности) и Δ (п) (подсчитана на «свежих» точках проверочной последовательности).

Условимся об определенных правилах нарастания сложности уравнений регрессии. Например, начнем с перебора всех линейных уравнений от одного аргумента:

$$\varphi = a_0 + a_1 x_{i,-L} \quad (1 \leq i \leq m);$$

затем — линейных уравнений для каждого двух аргументов:

$$\varphi = a_0 + a_1 x_{i,-L} + a_2 y_{j,-L} \quad (1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m);$$

далее — уравнений с ковариациями:

$$\varphi = a_0 + a_1 x_{i,-L} + a_2 y_{j,-L} + a_3 x_{i,-L} y_{j,-L}.$$

Первый индекс (i или j) указывает номер аргумента, второй (L) — число тактов запаздывания, с которым он измеряется.

Введем квадраты, кубы переменных и т. д. Последовательность действий можно выбрать так, чтобы ошибка монотонно изменялась. Для каждого вида уравнений регрессии выберем лучший результат (т. е. уравнение, дающее наименьшую ошибку) и построим графики (рис. 1).

При этом окажется, что ошибка Δ (об) непрерывно падает согласно правилу «чем сложнее уравнение, тем оно точнее», пока не достигнет сложности, где число

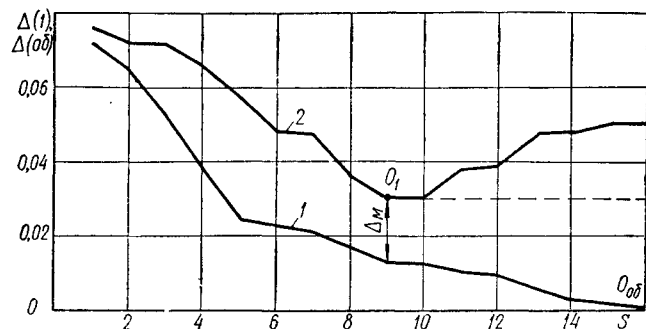


Рис. 1. График изменения среднеквадратичных ошибок $\Delta(1)$ и $\Delta(об)$ при постоянном нарастании сложности S уравнений регрессии:

1 — ошибка на обучающей последовательности $\Delta(об)$ (монотонно падает до нуля); 2 — ошибка на «свежих» точках отдельной проверочной последовательности $\Delta(1)$ (имеет минимум, который можно использовать для объективного выбора уравнения); Δ_M — методическая ошибка или ошибка от многогранности; — — — — — граничный случай.

коэффициентов равно числу точек обучающей последовательности. Здесь $\Delta(об) = 0$ (точка $O_{об}$). Точка плоскости «ошибка—сложность», где достигается нуль ошибки, не зависит от выбора правила нарастания сложности уравнений.

Именно монотонное снижение ошибки и отсутствие экстремумов функции $\Delta(об)$ не позволяют устранить человека при моделировании по обычному, регрессионному анализу. Человек вынужден указать степень уравнения регрессии, что можно рассматривать как некоторое «внешнее дополнение», необходимое для выбора единственной модели.

Совершенно другой характер имеет изменение среднеквадратичной ошибки $\Delta(1)$. Здесь имеется глобальный минимум ошибки, который также для всех правил нарастания сложности уравнений остается в одной и той же точке (точка O_1). После достижения минимума ошибка начинает увеличиваться или остается постоянной. Наступает так называемый «overfitting» (переудовлетворение точек). Дальнейшее увеличение сложности уравнений регрессии только ухудшает математическую модель.

Наличие минимума второго критерия — критерия селекции, указывающего единственную модель оптимальной сложности, позволяет устранить человека от выполнения этапа выбора уравнения регрессии. Открывается возможность указать объективный метод математического моделирования, при котором структуру модели вырабатывает машина. Аналогичный минимум имеется и для ряда других критериев селекции (например, для критерия несмещенности или баланса переменных), обладающих свойствами «внешнего дополнения» [5].

После того, как найдена структура модели, ее коэффициенты уточняются (при помощи случайного поиска) так, чтобы получить нулевое значение критерия селекции.

Рассмотренный аппарат (полный перебор уравнений по двум критериям при постепенном их усложнении) может решить задачу машинного синтеза оптимальной модели по указанному критерию селекции. Этот аппарат может снять с человека необходимость глубокого изучения причинно-следственных связей между переменными и изобретения уравнения элементов системы. Однако при большом числе аргументов (больше семи) полный перебор невозможен из-за слишком большого объема счета. Поэтому приходится применять некоторые способы рационализации перебора моделей.

Выясним, как же усесть объем полного перебора уравнений регрессии. В методах самоорганизации для этого используются приемы массовой селекции растений или животных. Опишем, например, опыт массовой селекции самого черного тюльпана (СЧТ) по двум методикам: при расширяющемся с каждым посевом поле селекции и при постоянном размере поля (рис. 2).

При расширяющемся поле селекции на втором году высеваются все семена урожая первого года, на третьем — все семена второго года и т. д. до получения самого черного тюльпана. На некотором году селекции нужно остановить, так как тюльпаны начинают уже светлеть, т. е. ухудшаться.

При постоянном размере поля селекции селекционеру приходится выбирать для последующего посева только некоторое количество семян тюльпанов, в наибольшей степени удовлетворяющих требуемому качеству (обозначено буквой F и называется ниже «степенью свободы» или «базисом проекции»). Селекционеры знают, что если F достаточно велико, то результаты селекции при расширяющемся поле и при постоянном размере поля будут одинаковы.

Одна из теорем теории МГУА утверждает то же самое: постепенно увеличивая «базис проекции» F при определенных условиях, можно достичь такого его значения, при котором результат многорядной селекции и результат полного перебора совпадают. Минимальное значение F находится при помощи ряда проб. Всегда можно расширить свободу выбора настолько, чтобы пропустить все возможные комбинации в каждом ряду. Однако и при этом не всегда получается результат полного перебора. Этот результат возможен только при выполнении определенных условий, налагаемых на способ комбинирования переменных, т. е. на вид частных полиномов.

Частные полиномы должны быть достаточно сложны и содержать разнообразные комбинации аргументов. Тогда результат полного перебора не будет потерян.

Полный перебор всех вариантов решения применим только при малом числе переменных. Именно поэтому ЭВМ не может «играть» в шахматы без возможного проигрыша, так как для этого требуется перебрать 10^{120} вариантов. Для такого перебора все машины мира должны работать сотни лет. Сейчас в мире больших универсальных

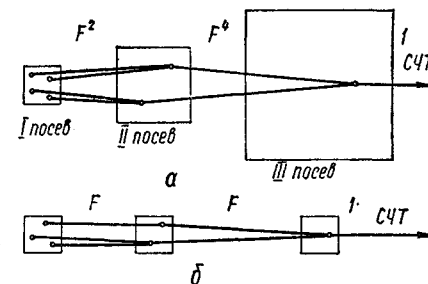


Рис. 2. Две методики массовой селекции самого черного тюльпана (СЧТ):

а — при расширяющемся опытным поле $F^2 \rightarrow F^4 \rightarrow 1$ (эквивалент полного перебора); б — при постоянном размере поля $F \rightarrow F \rightarrow 1$ (эквивалент селекции при сохранении свободы выбора решений $F = \text{const}$).

вычислительных машин более 150 000! Вот и получается, что машина может играть беспроигрышно только в эндшпилье.

Человек же решает шахматные задачи при помощи так называемых эвристик — догадок, основанных на общем опыте. Программы эвристической самоорганизации действуют подобно способу мышления человека: в них предусмотрены генераторы комбинаций и пороговые самоотборы наиболее полезной информации по ряду эвристических критериев. В теории самоорганизации разработаны так называемые рационализированные многорядные алгоритмы, использующие принципы селекции животных или растений МГУА. Эти алгоритмы существенно сокращают объем перебора моделей. Так, например, на машине средней мощности можно перебрать все варианты моделей при числе переменных, не превышающем пяти — семи. При использовании метода МГУА число переменных может достигать тысячи. Однако при этом критерий селекции должен обладать определенными свойствами (плавность изменения при переходе от одной модели к другой модели большей сложности).

Разнообразие программ (алгоритмов) МГУА объясняется тем, что способ повышения сложности моделей или их комбинаций является не принципиальным. Выбор программы часто определяется параметрами машины, причем все время появляются новые, более удобные программы.

Из сказанного вовсе не следует, что все основные задачи самоорганизации математических моделей сложных объектов на вычислительных машинах уже полностью решены. Можно назвать пять основных задач, которые, для осуществления полной самоорганизации, нужно передать машине.

Первая задача — выбор критерия селекции. До сих пор этот выбор является эвристическим и принадлежит еще человеку. В качестве критериев используются ошибка прогноза, определяемая на новых точках (критерий регулярности), и так называемый критерий несмещенности модели. В последнее время был найден весьма перспективный критерий селекции моделей оптимальной сложности, который получил название «критерия баланса переменных». Этот критерий как бы реализует невозможное — дает точку опоры в будущем. Действительно, что известно точно о будущем? Точно известно, что так называемые балансовые соотношения будут выполняться в 2000 г. так же, как они выполняются сейчас или выполнялись в прошлом. Это означает, что машина должна выбрать такую систему уравнений, при которой не нарушается баланс. Например, при прогнозировании стоков рек Днепр и Неман можно прогнозировать дополнительно сумму и разность стоков этих рек. Машина выбирает только такие прогнозы, при которых сумма и разность в будущем не нарушатся. Таким образом, критерий баланса

переменных является универсальным и наиболее эффективным критерием селекции для всех задач.*

Вторая задача — выбор среды моделирования или списка возможных переменных, образующих так называемую систему элементов данного сложного объекта. Решение этой задачи сейчас еще не поддается самоорганизации: машина может только выбрать наиболее эффективные переменные из списка составляющих, заданного с избытком, так как она еще не умеет изобретать новые (более эффективные переменные).

Для решения второй задачи по методу самоорганизации нужно моделировать мозг с его «этажами» абстрактной и конкретной памяти, организовать накопление большого количества информации (опыта) и выбор решений по критериям подобия и близости ситуаций. Работа в этом направлении ведется. До тех пор, пока не будут созданы модели генерации эвристик, можно пользоваться так называемым комбинированным методом: список возможных переменных берут из всех работ детерминистического направления, объединяя все известные переменные в один список. При этом все ненужные переменные машина отбросит сама.

Третья задача — выбор опорной функции и ее сложности. До открытия принципа самоорганизации считалось, что участие человека при решении этой задачи обязательно. Утверждали (да и сейчас еще утверждают), что универсальный подход невозможен. Опыт моделирования одного объекта почти ничего не давал для моделирования другого, поэтому необходимо было глубокое изучение специфики каждого из них.

Теперь подход самоорганизации моделей оптимальной сложности является универсальным. При моделировании практически используется весьма ограниченное число опорных функций. Машина при помощи перебора указывает наиболее подходящую из них: та опорная функция (или их суперпозиция) лучше, которая определяет более глубокий минимум критерия селекции. Глубина минимума критерия является показателем достоверности полученного решения. Если глубокого минимума не получено, значит в области перебора машины нет ни подходящих данных, ни списка переменных, ни списка опорных функций. Машина в этом случае как бы говорит человеку: «Ты, брат, шутишь со мной или в самом деле ничего не понимаешь! Давай мне исходный материал получше!»

Четвертая задача — определение числовых оценок коэффициентов опорной функции оптимальной сложности, полученной в результате решения предыдущей, третьей задачи. Решение четвертой

* Наиболее совершенный способ построения критерия баланса состоит в аппроксимации связей переменных по критерию несмещенности (см. журнал «Автоматика», 1975, № 4).

задачи на машинах давно освоено и не представляет трудностей. Здесь наибольшее применение находят методы адаптации*, случайного поиска или решения системы нормальных уравнений Гаусса.

Пятая задача — как лучше использовать прогнозы для автоматического управления объектом? Разработаны методы использования точных прогнозов для выработки рекомендаций по автоматическому управлению сложными производственными и экономическими объектами. При этом оказалось, что принцип управления сложным объектом с оптимизацией прогноза применим даже к таким неустойчивым объектам, которыми до сих пор мог управлять только человек. Установлен так называемый «асимптотический закон», согласно которому увеличение времени упреждения прогноза обязательно приводит к устойчивому управлению. Прогнозирующие модели при этом непрерывно синтезируются методами самоорганизации по части переменных и небольшому числу экспериментальных точек. Это делает перспективным переход от автоматизированных систем управления (АСУ), в которых решения по управлению принимает человек, к автоматическим системам управления (АВСУ), в которых человек указывает только критерий управления.

Основным направлением развития кибернетики является сейчас создание союзной сети больших вычислительных центров, связанных линиями передачи информации, с выносными терминалами — периферийными или локальными машинами, расположенными в местах ввода данных и потребления результатов счета. Такая система напоминает собой идею «большой энергетики», согласно которой проблема энергоснабжения решается при помощи крупных электростанций и сверхдальних линий электропередач, связывающих энергетические центры. Разработка методов самоорганизации позволяет решать весьма сложные задачи в основном на месте, на местных машинах, с сокращением до минимума обращений в крупные вычислительные центры. Таким образом, структура будущей вычислительной системы зависит от того, насколько будут разработаны универсальные алгоритмы эвристической самоорганизации. Наступит время, когда объем вычислений настолько уменьшится, что задачи прогноза и управления с оптимизацией прогноза будут решаться на периферийном терминале, т. е. резко возрастет роль локальных вычислительных машин. Проще изредка указывать машине критерий и пополнять данные, чем непрерывно принимать и передавать подробнейшую управляющую информацию.

Только решение второй, наиболее трудной задачи не поддается сейчас еще самоорганизации, т. е. полной передаче ее решения ма-

шине. Поэтому пока еще среду решения задачи (таблицу экспериментальных данных) должен задавать человек.

Может ли сейчас быть создана общая теория самоорганизации? Ответ принадлежит ближайшему будущему. Решение указанных выше пяти задач явится решением проблемы самоорганизации математических моделей на вычислительных машинах. Пока это и является конечной целью новой теории самоорганизации. Разработка методов решения, практически устраняющих человека, возможно впоследствии и позволит сделать и более широкие обобщения, например о проблеме самоорганизации жизни на Земле, т. е. подойти к решению проблемы философского плана «человек — материальное окружение».

Сказанное означает, что с вводом в кибернетику принципов эвристической самоорганизации придется «подкорректировать» намеченные прежде пути ее развития. Решения и прогнозы самоорганизации будут оптимальными, единственными и неоспоримыми.

Теория самоорганизации вместо вопроса «человек или машина» ставит другой вопрос: На каком уровне абстракции идет диалог человека и машины? На утомительном языке конкретных указаний или при помощи языка «интегральных воздействий» — критериев? Ответ ясен: указания человека машине нужно свести к минимуму, практически к нулю, т. к. универсальные общеизвестные программы вырабатываются один раз и навсегда.

Значит ли сказанное выше, что кибернетика научится вскоре предсказывать открытия, а это значит, что и планировать их? Речь может идти лишь о прогнозировании эффекта будущих открытий, их влияния на общий научный и технический потенциал. Что касается дат открытий, то в самом деле их можно предсказать и даже с достаточно высокой точностью. Нельзя предсказать сути открытия, но его влияние на ход прогресса — можно. Примером таких предсказаний может служить модель зависимости эффективности установок связи от ряда изобретений. Так, изобретение реле сначала резко повысило эффективность установок связи, но потом рост замедлился. Как только этот вид аппаратуры был освоен, появилось новое открытие — электронные лампы. Электронные лампы снова дали толчок росту эффективности установок и снова наступило замедление. Тот же эффект вызвало введение транзисторов, затем интегральных схем. Неизвестно, что придет на смену интегральным схемам, но общий ход кривой роста эффективности установок связи — вплоть до предела, определяемого скоростью света, — по экспериментальным данным прошлого прогнозировать можно. В заключение можно сказать, что в моделировании всегда то, что кажется невозможным, становится возможным, если подняться на более высокий уровень описания моделируемого процесса на некотором языке более высокого порядка — так называемом «метаязыке» — и

* Четвертую задачу часто называют задачей адаптации, в отличие от третьей, которая является собственно задачей самоорганизации.

перейти к объективным методам самоорганизации. При этом учитывается масса факторов, неизвестных человеку-заказчику: экономических, социальных и др. Объективные методы прогноза показывают возможную скорость технического прогресса.

Исследование методов самоорганизации математических моделей на ЭВМ — одна из острых потребностей, стоящих сейчас перед наукой прогнозирования и управления действительно сложными объектами.

Основные обозначения

- $\delta_{об}, \Delta (об)$ } — абсолютные и относительные среднеквадратичные ошибки, %, определяемые на обучающей, проверочной и экзаменационной последовательностях соответственно, для алгебраических уравнений регрессии;
 $\delta_1, \Delta (1)$ }
 $\delta_2, \Delta (2)$ }
- $\delta_{об}^2, \Delta^2 (об)$ } — то же для дифференциальных уравнений регрессии;
 $\delta_1^2, \Delta^2 (1)$ }
 $\delta_2^2, \Delta^2 (2)$ }
- $\Delta (об)_{норм}$ } — то же при нормированных по среднему значению переменных;
 $\Delta (1)_{норм}$ }
 $\Delta (2)_{норм}$ }
- f — число обратных связей;
 F — «свобода выбора решений» или «базис проекции»;
 L — величина запаздывания аргумента ($0 \leq L \leq L_{max}$);
 L_{max} — максимальное запаздывание (размер учитываемой предыстории);
 i, j — индексы номера аргумента ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$);
 $k_{\varphi, y}$ — коэффициент взаимной корреляции переменных φ и y ;
 C_{n+m}^n — число членов полного полинома;
 k — число членов временного тренда;
 m — число аргументов модели;
 M — общее число переменных в объекте ($m \geq M - f$);
 N — число экспериментальных точек (узлов интерполяции);

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕТОДА ГРУППОВОГО УЧЕТА АРГУМЕНТОВ

- $N_{об}$ — число точек в обучающей последовательности
 $N = N_{об} + N_1 + N_2$;
 N_1 (или $N_{пр}$) — число точек в проверочной последовательности;
 N_2 — число точек в экзаменационной последовательности;
 λ — основные (измеряемые) возмущающие воздействия;
 μ — регулирующее воздействие;
 ξ — число членов частных полиномов;
 $q = k - 1$ — степень временного тренда;
 p — число частных описаний второго ряда селекции $p = C_s^2$;
 R — число повторений однократного прогноза в процессе многократного прогноза;
 s — число частных описаний первого ряда селекции ($s = C^2 m$);
 S — показатель сложности модели;
 r — число рядов селекции;
 T_k — время когерентности;
 T_y — время упреждения прогноза;
 t — текущее значение времени;
 n — степень полного полинома;
 v — регулирующие и возмущающие воздействия (вместе);
 φ — выходная величина;
 x, y, z, v, w, q — переменные первого, второго и т. д. рядов селекции;
 $-T_L \dots$ — 3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ..., T_y — индексы отсчета тактов времени;
 $-T_L$ (или $k - N_L$) — запаздывание;
0 (или k) — текущий момент;
 T_y (или $k + N_y$) — упреждение;
 $\Delta(1) \rightarrow \min$ — критерий регулярности;
 $n_{см} \rightarrow \min$ — критерий смещенности модели;
 $n_{см}$ — критерий несмещенности;
 B — показатель невязки (разбаланса) уравнений;
 $B \rightarrow \min$ — критерий баланса переменных.

Метод Группового Учета Аргументов (МГУА) является основой математического обеспечения специализированных вычислительных машин для прямого моделирования сложных систем по небольшому числу экспериментальных данных.

Ниже под «математической моделью» понимается система уравнений регрессии, служащих либо для однократного прогноза будущего хода процессов в сложной системе, либо для описания физических и других законов, действующих в объекте (т. е. для идентификации объекта). В первом случае модель дает наиболее точные количественные значения выходных переменных на будущее при однократном прогнозировании, что можно использовать для выработки оптимального управления, но сама модель отличается от «физической». Во втором случае модель должна отражать законы, причинно-следственные связи, действующие в объекте, хотя для однократного прогнозирования она не является наилучшей. Физическая модель также используется для прогнозирования и управления, но другим способом, по алгоритмам так называемого многократного прогнозирования. При этом уравнения физической модели (дифференциальные или алгебраические) применяются многократно для получения долгосрочных прогнозов с большим упреждением.

При получении точного многократного прогноза сначала по алгоритмам МГУА синтезируется модель объекта. Если предоставлены короткие выборки данных, то наиболее точные однократные и многократные прогнозы дают математические модели, синтезированные по Методу Группового Учета Аргументов.

Для постепенного повышения сложности математической модели (с целью нахождения минимума критерия селекции) лучший эффект дает использование многорядных селекционных алгоритмов МГУА. Новым по сравнению с работой [37] является то, что теперь в качестве критерия селекции используются не только критерий

регулярности, но и новые критерии, называемые «критерием несмещенности» и «критерием баланса переменных».

Наиболее рекомендуемые критерии селекции показаны на рис. 3. Критерии несмещенности и критерии баланса переменных будут рассмотрены подробно в четвертой главе. Здесь же только укажем, что критерий регулярности рекомендуется для синтеза модели одно-



Рис. 3. Наиболее рекомендуемые критерии селекции.

кратного прогноза, критерий несмещенности — для идентификации уравнений объекта, а критерий баланса переменных — для системного многократного прогноза и при выделении трендов. В первой главе рассматриваются вопросы теории МГУА для случая, когда в качестве критерия селекции используется критерий регулярности. Вопросы теории МГУА с критерием несмещенности и критерием баланса переменных еще никем не рассматривались.

«СТРАНА» МАЯТНИКОВ

Теория автоматического регулирования господствует в удивительной (и весьма уважаемой) стране — стране маятников. Как известно, маятник описывается дифференциальным уравнением первого или второго порядка. Теория автоматического регулирования, исследует системы, в которых каждый элемент описывается таким уравнением. После исключения промежуточных переменных уравнение динамики системы в целом имеет порядок, равный (или ниже)

сумме степеней характеристических уравнений отдельных элементов системы. Система регулирования представляется моделью, состоящей из взаимосвязанных маятников.

В такой стране маятников всегда точно известно, где границы моделируемой системы. Например, при составлении системы уравнений динамики самолета совершенно ясно, что следует, а что не следует включать в эту систему, где сосредоточены массы и силы упругости и т. п. В сложных системах границы можно установить только очень условно.

Следуя детерминистическим качествам человеческого мышления, в теории автоматического регулирования (управления) связывают величины, измеряемые в один и тот же момент времени. Уравнения со многими запаздывающими аргументами обычно не используются, так как методы исследования таких уравнений почти не разработаны.

Уравнения динамики элементов системы задаются априори или, другими словами, изобретаются человеком. Это в большинстве случаев довольно простые линейные уравнения, без запаздывающих аргументов и без функций времени в правой части.

Психологическая способность человека состоит в том, что он еще может иногда правильно указать причинно-следственные связи между процессами, протекающими в один и тот же момент времени, но совершенно беспомощен при установлении таких связей между величинами, измеряемыми в различные моменты времени. Человеческий мозг, как правило, с большим трудом справляется с задачей учета предьстории. Уравнения с многими запаздывающими аргументами может синтезировать только вычислительная машина.

С точки зрения моделирования сложных систем теория автоматического регулирования имеет еще один существенный недостаток: она опирается на так называемый «системный подход», который основан на принципе «чем сложнее модель, тем она точнее», противоположном принципу самоорганизации. Кроме того, в теории регулирования обычно уделяется мало внимания нестационарным объектам. Для исследования последних необходимо выделять временные тренды — функции времени, учитываемые в правой части уравнений динамики. Реально большинство сложных объектов являются нестационарными, т. е. содержат в себе независимые генераторы смещения, описываемые временными трендами. Тренды — это тоже свойство моделей, находящихся уже за границами «страны маятников» — детерминистической страны анализа причин и следствий (входных и выходных переменных), измеряемых в один и тот же момент времени в стационарных объектах.

Стаффорд Бир [5] пишет: «класс сложных детерминированных систем пуст». Это означает, что система, состоящая из тысячи маятников, все же не относится к сложным системам. Сложные системы начинаются там, где кончается «страна маятников». В области таких

систем вступают в действие запаздывающие аргументы и тренды, границы моделируемых систем становятся очень условными, неопределенными. Здесь уравнения синтезирует машина, а не человек, и аппарат классической теории регулирования не достаточен.

«СТРАНА» МНОЖЕСТВЕННОСТИ МОДЕЛЕЙ, В КОТОРОЙ ОТКАЗЫВАЮТСЯ ОТ АБСОЛЮТНЫХ ОЦЕНОК

Из предыдущего видно, что исходя из принципа самоорганизации человеку отводится пассивная роль при решении задач, хотя за ним остается роль заказчика. Машина наилучшим образом стремится достичь цели, указанной человеком. В условиях свободы принятия решений и возможности мыслить по-своему машина становится учителем и другом человека.

Чтобы оправдать и обосновать такой взгляд, в теории самоорганизации пришлось пересмотреть и видоизменить многие, на первый взгляд, фундаментальные положения прикладной математики, которые считались до сих пор совершенно незыблемыми.

Так, начиная с работ К. Шеннона (для непрерывных систем) и Мак-Каллока и Питтса (для дискретных систем), в прикладной математике был провозглашен так называемый «принцип множественности математических моделей». По каждому набору данных будто бы можно найти бесконечное множество одинаково точных моделей, но единственную физическую модель среди многих ее отражений найти принципиально невозможно. Абсурдность такого утверждения очевидна.

Представим себе следующее положение: на столе лежат три апельсина. Для того чтобы сосчитать их количество, пригласили некоторого мудреца (воплощение прикладной математики сегодняшнего дня). На вопрос: сколько апельсинов лежит на столе? — мудрец ответил, что он не может сосчитать их. Но один из его друзей сказал, что на столе пять апельсинов, а второй — что их десять. Сравнивая эти две гипотезы, мудрец с уверенностью ответил, что первый друг более прав, так как его гипотеза ближе к истине. Вот и все, что можно было сделать.

Этот небольшой рассказ иллюстрирует современное положение в прикладной математической статистике. Объективно существует один единственный ответ на интересующий нас вопрос — сколько апельсинов на столе? В свете теории множественности моделей возможность абсолютной оценки и единственности математической модели, дающих единственный ответ на интересующие вопросы, отрицается.

Наиболее значительные примеры многозначительности моделей можно найти в регрессионном анализе: при постепенном повышении сложности уравнения регрессии (например, числа слагаемых и сте-

пени полинома) ошибка, измеряемая на всех экспериментальных точках, монотонно падает (рис. 1, кривая 1). Как только число коэффициентов уравнения регрессии станет равным числу экспериментальных точек, ошибка становится равной нулю (точка O_{00}). Заметим, что это могут быть коэффициенты при любых членах уравнения, следовательно, действительно число моделей бесконечно! Через заданное число точек можно всегда провести бесконечное множество кривых высокой степени. Это утверждение справедливо только в случае, когда для выбора модели пользуются одним критерием, не являющимся «внешним дополнением», по терминологии Стаффорда Бира [5].

Теорема неполноты Геделя произвела в математической логике (или в науке о доказательствах) целый переворот. Оказалось, что при всякой системе исходных аксиом всегда можно указать теорему, для доказательства которой требуются новые аксиомы — внешние дополнения. Любой язык недостаточен для решения всех задач, так как есть задачи, требующие применения языка более высокого уровня абстракции. Применительно к рассматриваемым вопросам это означает, что, пользуясь данными точек обучающей последовательности, которые уже были использованы для получения оценок коэффициентов (по методу наименьших квадратов), принципиально нельзя найти лучшую, единственную модель. Для этого требуется некоторый внешний критерий, которым, например, может быть ошибка, определяемая на новых точках отдельной проверочной последовательности. Только внешние дополнения имеют минимума, указывающие единственную модель оптимальной по данному критерию сложности.

На рис. 1 показано, что при постепенном повышении сложности (например, числа членов и степени) уравнения регрессии среднеквадратичная ошибка, определяемая на отдельной проверочной последовательности, $\Delta(1)$ сначала снижается (до $S = 9$), а затем начинает повышаться (кривая 2). В некоторых задачах ошибка после достижения минимума почти не возрастает (показано пунктиром), или имеется несколько минимумов. Всегда можно найти такой порядок усложнения модели, при котором получается единственный минимум критерия. Если ошибка перестает убывать, для выбора модели оптимальной сложности применяется «правило левого угла»: выбор модели соответствует точке O_1 , где достигается наименьшее значение ошибки.

Особенность излагаемой процедуры синтеза модели оптимальной сложности состоит в том, что весьма сложное решение может быть получено при малом числе экспериментальных точек.

При учете только одного критерия — минимума среднеквадратичной ошибки, подсчитанной на всех заданных точках, невозможно получить однозначную оценку большого числа коэффициентов математической модели по малому числу узлов интерполяции (т. е.

по малому числу экспериментальных точек). Уже при двух критериях (второй из которых должен обладать свойствами внешнего дополнения) становится возможным как найти единственную модель, так и определить оценки коэффициентов модели практически любой сложности, располагая всего несколькими точками. Три критерия понадобятся для решения каких-либо трех взаимосвязанных вопросов оптимизации модели, например для оптимизации разделения точек на обучающую и проверочную последовательности и т. д.

Получаемая по указанным правилам единственная оптимальная модель соответствует выбору второго (эвристического) критерия. Если требуется точность прогнозирования, то получим модель, специфическую для однократного прогноза. Она часто является «бессмысленной», т. е. не поддается никакому объяснению. Если же потребуются синтез физической модели (которая, вопреки общепринятому мнению, не всегда является наилучшей для однократного прогнозирования), то получим модель, отражающую всю картину причинно-следственных связей. При этом машина откроет закон природы, объективно существующий в объекте наблюдения. Так, в качестве упражнения был «открыт» машиной второй закон Ньютона (по пяти точкам движения падающих яблок). Затем решались практические задачи самоорганизации модели фотосинтеза органического вещества в растениях, модели смещения двух потоков, экономической системы Англии, организации отрасли целлюлозно-бумажной промышленности. Некоторые примеры приведены в главе третьей, а также в работе [24].

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КАК ЗАМЕНТЕЛЬ МОДЕЛИ МЫШЛЕНИЯ

Еще в XVII столетии великий Лейбниц пытался решить тайну «Всеобщего Искусства Изобретения». Он утверждал, что одной из двух частей этого искусства является комбинаторика — перебор постепенно усложняющихся комбинаций исходных данных. Второй частью является эвристика — свойство догадки человека. И сейчас вторая часть Искусства Изобретения все еще остается нераскрытой. На языке нашего времени эта часть — модель мышления человека, включающая в себя процессы генерации эвристик (догадок, изобретений, открытий).

Однако пока тайны генерации эвристик еще не раскрыты, вторую часть Искусства Изобретения может часто заменить собой то, что называется принципом внешнего дополнения [5]. После известных работ А. Н. Тихонова, В. И. Иванова этот принцип в математике получил название регуляризации решений. Ниже мы будем пользоваться термином «регуляризация»

Регуляризация не может, конечно, полностью заменить собой «настоящую» вторую часть Искусства Изобретения — модель генерации эвристик. Но она дает тот же оптимальный результат в пределах заданного множества комбинаций. Рассмотрим два примера.

1. В задаче распознавания образов пока только человек может изобретать принципиально новые, эффективные признаки. Регуляризация позволяет найти наиболее эффективные признаки только среди данного их множества и таким образом решить ту же задачу.

2. В задаче объективной идентификации законов природы пока только человек может задать структуру закона «с избытком» элементов и связей. Регуляризация позволяет исключить из предложенной схемы элементы и связи, которых нет в реально существующем объективном законе, и, таким образом, «открыть» его.

Можно привести и другие примеры, показывающие, что часто регуляризация способна заменить процесс генерации эвристик. Роль регуляризации настолько велика, что действительна формула

Искусство Изобретения = усложняющиеся
комбинации + регуляризация.

Например, селекция видов новых растений (и животных) полностью соответствует этой формуле: селекционеры скрещивают растения с различными генетическими кодами наследственности, причем комбинации кодов с каждым поколением растений усложняются. Регуляризация (внешнее дополнение) состоит в том, что селекционер выбирает в каждом поколении те растения, которые ближе всего отвечают его конечной цели. Селекция прекращается, когда цель достигнута.

«СВОБОДА ВЫБОРА РЕШЕНИЙ» ПО Д. ГАБОРУ

Принцип самоорганизации был подтвержден в недавно появившейся работе лауреата Нобелевской премии за 1971 г., автора голографии, английского ученого Дениса Габора [67]. Согласно этой работе можно определить такие алгоритмы самоорганизации, в которых предусматривается «свобода выбора последующих решений». Принцип неокончательных решений, реализуемый в перцептроне (где из ряда в ряд проходит не единственное оптимальное, а целый ряд близких к нему решений), а также работа селекционера при массовой селекции растений могут быть примерами таких алгоритмов. Свобода выбора обеспечивается тем, что к каждому последующему выбору предлагается ряд решений предыдущего выбора, а не одно единственное решение.

Селекционеры давно открыли важность свободы выбора решений: в каждом поколении выбирается не одна пара, а некоторое количество растений, наиболее точно удовлетворяющих заданному критерию регуляризации (близость к черному тюльпану). Кроме того, они

установили, что слишком много свободы так же вредно, как и когда ее нет. Имеется оптимум количества растений, отбираемых в каждом поколении.

Управление, планирование или распознавание образов, при котором на каждом ряду выбирается единственное решение, называется жестким. Если же в каждый момент принятия решений отбирается некоторое множество решений, близких к оптимальному (по критерию регуляризации), то такое управление отвечает принципам самоорганизации.

Многорядность и наличие свободы выбора решений служат основными признаками систем (алгоритмов), действующих по принципу самоорганизации. Такие системы являются антиподом к жестким детерминированным системам (алгоритмам), при которых в каждый момент времени принимается единственное решение, от которого в будущем уже нельзя отказаться.

Принцип свободы выбора последующих решений как бы осуществляет фантастическую машину времени Уэльса. В каждый момент времени при решении все более усложняющихся вопросов можно вернуться назад в прошлое и выбрать там более подходящее впоследствии решение.

ОСНОВНЫЕ НЕДОСТАТКИ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВЫБОР КРИТЕРИЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Первый, основной недостаток современного математического моделирования состоит в нецелесообразном выборе второго критерия. Например, указав для прогнозирования конкретную функцию с определенным числом членов, находят единственную модель, но эта модель чаще всего не соответствует поставленным целям. До сих пор математическое моделирование не дает точных количественных показателей в сложных задачах.

Второй недостаток современного математического моделирования — в недостаточной и неоптимальной сложности моделей. Каждая наука, в том числе и прикладная математика, имеет свою стратегию развития. Двадцать — тридцать лет назад прикладная математика встретила с так называемым «проклятием многомерности». Многомерность является, например, препятствием для использования полного степенного полинома Колмогорова — Габора в качестве уравнения регрессии.

При большом числе переменных уравнения регрессии имеют слишком много коэффициентов, подлежащих определению (оценке). Например, при $m = n = 10$ число слагаемых степенного полинома $C_{20}^{10} = 100\,000$, где m — число входных переменных, n — степень полинома.

В этот момент развития науки была совершена стратегическая ошибка. Вместо того, чтобы поставить и решить задачу доопределения по двум и большему числу критериев (теоремы Геделя, принцип внешнего дополнения и регуляризация тогда были уже известны), прикладная математика ограничилась оптимизацией коэффициентов уравнений в небольшой области, где число коэффициентов равно или меньше числа заданных точек $C_{n+m}^n \leq N$. При этом практически использовалась только линейная или квадратическая регрессия. Примеры показывают, что в подавляющем большинстве случаев в такой области нельзя получить необходимого результата. По-настоящему точные решения (для прогнозов идентификации управления) лежат в области, где $C_{m+n}^n > N$, которая никогда и никем до сих пор не исследовалась. Применение двух критериев позволяет искать оптимум в обеих областях, чем и объясняется высокая точность результатов применения МГУА. Расширение области поиска оптимума, как правило, приводит к улучшению точности математических моделей.

Эвристический характер второго критерия (критерия селекции), свобода выбора решений, многомерность алгоритма селекции и интегральные воздействия «без адреса» — определяют собой подход самоорганизации [37].

Часто, ссылаясь на высказывание Эйнштейна, утверждают, что «настоящая теория» или «настоящая оптимальная модель» должна быть «простой» и «красивой» [10].

Принцип самоорганизации опровергает это утверждение. Возможно, что в минувшее время, когда сложная система приводилась к системе взаимосвязанных маятников (элементов второго и первого порядка), оптимальная модель была простой. В наше время оптимальная модель должна быть моделью высокой сложности, адекватной сложности рассматриваемого объекта [34]. Только многорядная запись уравнений регрессии, применяемая в МГУА, позволяет воспроизвести такие модели.

Необходимость сложности относится не только к алгебраическим, но и к дифференциальным уравнениям. Обычно объекты настолько сложны, что только нелинейные дифференциальные уравнения оптимальной сложности с запаздывающими аргументами могут обеспечить высокую точность количественных оценок. Таким образом, теория автоматического регулирования, основанная на линейных дифференциальных уравнениях без запаздывающих аргументов, может служить только для весьма приближенной качественной оценки реальных сложных систем (ошибка обычно более 100%).

Применение второго критерия является «внешним дополнением» Стаффорда Бира или «регуляризацией» неопределенности.

По А. Н. Тихонову вместо простой минимизации среднеквадратичной ошибки на всем множестве заданных точек следует минимизировать также второй критерий — сумму неувязок каждого уравнения и некоторой квадратичной функции гладкости, определенной на множестве предполагаемых решений и умноженной на некоторый числовой параметр (согласованный с величиной требуемой

точности аппроксимации). Этот прием называют регуляризацией некорректных задач [68].

Открытие, содержащееся в теории самоорганизации, состоит в том, что регуляризация должна быть целенаправленной и что ряд критериев регуляризации при постепенном усложнении модели проходит через минимум. Второй критерий, называемый критерием селекции, должен учитывать требования заказчика решения зада-

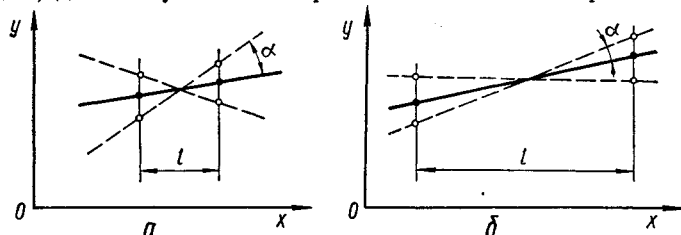


Рис. 4. График зависимости ошибки в оценке коэффициента регрессии $b_l = \operatorname{tg} \alpha$ от расстояния l между точками, в которых производятся измерения:

а — для узлов, расположенных далеко от среднего значения; б — для узлов, расположенных близко от среднего значения. Зачерненные кружки соответствуют истинным значениям функции, светлые — значениям, отсчитанным с ошибками.

чи, его мотивацию и цели, а также обладать свойствами внешнего дополнения (учитывать новую информацию).

В качестве основного критерия селекции используется критерий минимума среднеквадратичной ошибки на отдельной проверочной последовательности данных (критерий регулярности). Логика при выборе этого критерия такова: новые точки в чем-то похожи на имеющиеся уже данные. Предполагается некоторая представительность заданной последовательности точек, понятие которой не уточняется окончательно. Выделение отдельной проверочной последовательности может иметь много вариантов: для одних задач следует пользоваться одним рецептом разделения имеющихся данных на обучающую и проверочную последовательности, а для других — другим.

В теории самоорганизации внешнее дополнение, как и гипотезы, имеет эвристическую природу и должно быть указано человеком. Практические соображения часто сокращают выбор и делают эту задачу более легкой. На рис. 4 [59] показано, что для определения коэффициентов нормальных уравнений лучше использовать узлы интерполяции, расположенные подальше от середины множества узлов, чем узлы с малой дисперсией. Поэтому для обучающей последовательности необходимо применять узлы с большой дисперсией, а для проверочной — узлы с малой дисперсией. Все узлы нужно ранжировать по дисперсии, и вопрос сводится только к тому, где нужно разделить ряд на две части: $N = N_{об} + N_1$.

Существует определенный оптимум отношения $\frac{N_{об}}{N_1}$, который соответствует минимуму числа рядов алгоритма МГУА. При решении задачи кратковременного прогноза (на один интервал времени вперед) всегда ищут этот оптимум с тем, чтобы получить наиболее простую и достоверную модель.

Для однократного среднесрочного (на 5—10 интервалов вперед) и для долгосрочного (на 15—30 интервалов) прогнозов используются два внешних дополнения, или две проверочные последовательности: первая — для того, чтобы найти наименее чувствительную (наиболее регулярную) модель, вторая — для того, чтобы найти расположение обучающей и первой проверочной последовательностей на оси времени.

При синтезе модели краткосрочного прогноза расположение первой проверочной последовательности может быть оценено по точности, достигаемой на точках, взятых с упреждением на один интервал; но когда синтезируется модель для среднесрочного прогноза, вторая проверочная последовательность берется с упреждением на 5—10 интервалов. Так реализуется идея целенаправленного выбора двух проверочных последовательностей [42].

«СТРАНА» ЕДИНСТВЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ВЫБРАННЫХ ПО ВТОРОМУ КРИТЕРИЮ

Теория самоорганизации и основанный на этой теории Метод Группового Учета Аргументов (МГУА) приводят нас в область, наиболее адекватную решению задач моделирования действительно сложных систем, принципиально отличающихся от систем типа тысячи маятников. Она позволяет улучшить метод регрессионного анализа и приспособить его для так называемого *прямого моделирования сложных систем по небольшому числу экспериментальных данных*. МГУА представляет собой объединение регрессионного анализа и способов регуляризации.

Существенным является принцип единственности математической модели, получаемой по МГУА, для каждого заданного множества входных сигналов. Кроме того, важно использование математических моделей оптимальной сложности (при которой модель становится наиболее точной). Об одном компромиссе, допущенном математической статистикой (отрицание единственности модели), упоминалось выше. Другой компромисс, который был сделан в математической статистике, привел к тому, что для описания очень сложных систем предлагались и использовались слишком простые уравнения регрессии (линейные или второй степени). Конечно, при помощи такого аппарата нельзя получить хороших результатов.

Примеры показывают, что только МГУА, который решает задачу оптимизации сложности уравнений регрессии (при заданном классе опорных функций), дает наиболее точные прогнозирующие модели. При этом методе сложность полинома регрессии (измеряемая, например, по числу его слагаемых или по его степени) постепенно увеличивается, пока регулярность модели возрастает. Наиболее регулярная, единственная модель соответствует ее оптимальной сложности. Если сложность модели слишком возросла, ее регулярность начинает снижаться. Как указывалось выше, регулярность измеряется по уменьшению ошибки (или увеличению коэффициента корреляции), измеряемой на отдельной проверочной последовательности данных.

Многие примеры, просчитанные до сих пор, показывают, что оптимальная сложность модели достигается при учете запаздывающих аргументов и при высокой степени полного полинома регрессии. МГУА позволяет решать задачи, имеющие до 1000 аргументов. В это число входят как переменные, измеряемые в данный момент, так и измеренные со сдвигами во времени (для учета предыстории).

ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ МГУА

Большинство интерполяционных задач кибернетики, решаемых с помощью алгоритмов МГУА, сводятся к прямому восстановлению функции по небольшому количеству заданных ее точек (узлов интерполяции). Так, например, в задаче идентификации требуется восстановить по ряду экспериментальных точек характеристику объекта (его «гиперповерхность отклика»). Особенность этой задачи состоит только в том, что необходимо обеспечить «протекцию» всем аргументам. Алгоритм МГУА не должен исключать неэффективные аргументы.

В задачах прогнозирования и распознавания образов, наоборот, всякая протекция снижает эффективность. Здесь находят применение алгоритмы МГУА «без протекции переменным». В алгоритмах МГУА для оптимального управления и нормативного прогноза требуется сохранить в уравнениях регулирующие воздействия. Таким образом, небольшие отличия задач приводят к небольшим различиям в соответствующих алгоритмах МГУА. Все эти алгоритмы имеют общее основание — принцип селекции или самоорганизации.

Займствование алгоритмов переработки информации у природы является одной из основных идей кибернетики. «Гипотеза селекции» утверждает, что алгоритм массовой селекции растений или животных является оптимальным алгоритмом переработки информации в сложных задачах. При массовой селекции высевается некоторое количество семян. В результате опыления образуются сложные наследственные комбинации. Селекционеры выбирают некоторую часть

растений, у которых интересное их свойство выражено больше всего (эвристический критерий). Семена этих растений собирают и снова высевают для образования новых, еще более сложных комбинаций. Через несколько поколений селекция останавливается и ее результат является оптимальным. Если чрезмерно продолжать селекцию, то наступит «инцухт» — вырождение растений*. Существует оптимальное число поколений и оптимальное количество семян, отбираемых в каждом из них.

Алгоритмы МГУА воспроизводят схему массовой селекции. В них есть генераторы усложняющихся из ряда в ряд комбинаций и пороговые самоотборы лучших из них. Так называемое «полное» описание объекта

$$\varphi = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m),$$

где f — некоторая элементарная функция. Например, степенной полином заменяется несколькими рядами «частных» описаний:

1-ряд селекции: $y_1 = f(x_1x_2)$, $y_2 = f(x_1x_3)$, ..., $y_s = f(x_{m-1}x_m)$,
2-й ряд селекции: $z_1 = f(y_1y_2)$, $z_2 = f(y_1y_3)$, ..., $z_p = f(y_{s-1}y_s)$,
где $s = c^2$, $p = c_s^2$ и т. д.

Входные аргументы и промежуточные переменные сопрягаются попарно, и сложность комбинаций на каждом ряду обработки информации возрастает (как при массовой селекции), пока не будет получена единственная модель оптимальной сложности.

Каждое частное описание является функцией только двух аргументов. Поэтому его коэффициенты легко определить по данным обучающей последовательности при малом числе узлов интерполяции. Исключая промежуточные переменные (если это удастся), можно получить «аналог» полного описания. Математика не запрещает обе эти операции. Например, по десяти узлам интерполяции можно получить в результате оценки коэффициентов полинома сотой степени и т. д.

Из ряда в ряд селекции пропускается только некоторое количество самых регулярных переменных**. Степень регулярности оценивается по величине среднеквадратичной ошибки (средней для всех выбираемых в каждом поколении переменных или для одной самой точной переменной) на отдельной проверочной последовательности данных. Иногда в количестве показателя регулярности используется коэффициент корреляции.

Ряды селекции наращиваются до тех пор, пока регулярность повышается. Как только достигнут минимум ошибки, селекцию,

* Термины «инцухт» (inzucht) и «оверфиттинг» (overfitting) отражают одно и то же явление. Они обозначают, что в процессе постепенного усложнения математической модели последняя стала слишком сложной.

** Для повышения обусловленности матриц полезно пропускать в последующие ряды селекции переменные первого ряда, т. е. использовать ковариации x_iy_i , x_iz_i , ... и т. д.

во избежание «инцухта», следует остановить. Практически рекомендуется остановить селекцию даже несколько раньше достижения полного минимума, как только ошибка начинает падать слишком медленно. Это приводит к более простым и более достоверным уравнениям.

ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ МГУА

Алгоритм с линейными полиномами [34]. Различные алгоритмы МГУА отличаются друг от друга по виду опорной функции. В алгоритмах с линейными полиномами используются частные описания вида

$$y_k = a_0 + a_1x_i + a_2y_j, \quad 0 < i \leq m,$$

где m — число входных аргументов.

Усложнение модели происходит только за счет увеличения числа учитываемых аргументов: на первом ряду селекции синтезируются модели, содержащие по два аргумента, на втором — по три и четыре, на третьем — до восьми аргументов и т. д. Число рядов можно наращивать до $S = m - 1$ ряда, где все аргументы уже исчерпываются. Дальнейшее продолжение селекции не имеет смысла*. В результате применения алгоритма получим линейные алгебраические уравнения регрессии с учетом требуемого числа запаздывающих аргументов (всего до 1000 аргументов).

Селекцию наиболее регулярных или наиболее несмещенных пар можно выполнить с «протекцией переменным» или без нее. Поясним, что это такое. Как известно, в алгоритмах МГУА перебираются частные полиномы, составленные для всех возможных пар аргументов. Например, при четырех аргументах перебору подлежат следующие пары:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4
x_2			x_2x_3	x_2x_4
x_3				x_3x_4
x_4				

* В последнее время это положение отрицается. В примере с пятью аргументами самая несмещенная линейная модель получилась на тридцатом ряду селекции.

Если выбирать лучшие (по критерию селекции) пары из всех пар, то некоторые аргументы могут быть «выброшены» алгоритмом самоорганизации и не попадут в выходной полином. Если «насиленно» оставить какой-нибудь аргумент, то нужно обязательно выбрать хотя бы одну пару, лучшую в строке данного аргумента. Последняя комбинация x_3x_4 при этом обязательно проходит селекцию, причем наблюдается снижение точности, связанное с уменьшением свободы выбора.

В алгоритмах МГУА с протекцией переменным выбор способа нормализации последних не влияет на результат. В алгоритмах без протекции результаты могут быть различными в зависимости от способа центрирования и нормирования. Поэтому без протекции переменным следует применять «знакопостоянное» нормирование по формулам вида $x_i = \frac{X_i - X_{i\min}}{X_{i\max} - X_{i\min}}$ или оставаться при абсолютном отсчете переменных (если обусловленность матриц достаточна).

Алгоритм с ковариациями и с квадратичными описаниями [37]. В этом алгоритме используются следующие частные описания:

$$y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j;$$

$$y_k = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2.$$

Сложность модели увеличивается от ряда к ряду селекции как по числу учитываемых аргументов, так и по степени. Степень полного описания быстро растет. На первом ряду — квадратичные описания, на втором — четвертой степени, на третьем — восьмой и т. д. В связи с этим минимум критерия селекции находится быстро, но не совсем точно. Кроме того, имеется опасность потери существенного аргумента, особенно на первых рядах селекции (в случае отсутствия протекции). Специальные теоремы теории МГУА устанавливают условия, при которых результат селекции не отличается от результата полного перебора моделей. Все, что сказано было выше о протекции переменным и о нормализации, относится и к алгоритму МГУА с квадратичными частными описаниями.

Для того чтобы степень полного уравнения повышалась с каждым рядом селекции на единицу, достаточно рассматривать все аргументы и их ковариации как обобщенные аргументы и пользоваться составленными для них линейными частными описаниями.

Комбинаторный алгоритм [24, 44]. Основан на полном переборе моделей, приведенном в табл. 1. Здесь уже нет опасности пропуска степени или потери аргумента. Однако объем полного перебора практически таков, что уже при четырех — семи аргументах он становится невозможным. Разработаны комбинаторные алгоритмы МГУА, в которых для сокращения объема перебора используется принцип селекции наиболее регулярных (или несмещенных) моделей.

Алгоритм со случайным выбором партнеров [24, 62]. Рассмотренные алгоритмы МГУА предполагают полный перебор всех пар (комбинаций) аргументов или промежуточных переменных предыдущего ряда. В случае малой обусловленности матриц перебор расширяется и включает в себя пары переменных разных рядов, поэтому в задачах большой размерности для этого требуется слишком много времени счета. В работе [62] было показано, что число выбранных

Таблица 1

Комбинаторный алгоритм МГУА (постепенное усложнение модели для нахождения минимума критерия селекции)

Число полиномов	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
Правые части частных описаний	$z_1 = a_0$	$z_2 = a_1 x_1$ $z_2 + z_1$	$z_3 = a_2 x_2$ $z_3 + z_1$ $z_3 + z_2$ $z_3 + z_2 + z_1$	$z_4 = a_3 x_1^2$ $z_4 = z_1$ $z_4 = z_2$ $z_4 + z_2 + z_1$ $z_4 + z_3$ $z_4 + z_3 + z_1$ $z_4 + z_3 + z_2$ $z_4 + z_3 + z_2 + z_1$	$z_5 = a_4 x_2^2$ $z_5 + z_1$ $z_5 + z_2$ $z_5 + z_2 + z_1$ $z_5 + z_3$ $z_5 + z_3 + z_1$ $z_5 + z_3 + z_2$ $z_5 + z_3 + z_2 + z_1$ $z_5 + z_4$ $z_5 + z_4 + z_1$	$z_6 = a_5 x_1 x_2$ $z_6 + z_1$ $z_6 + z_2$ $z_6 + z_1 + z_2$ $z_6 + z_3$ $z_6 + z_3 + z_1$ $\dots$ $\dots$ $\dots$

Примечание. В таблице полиномы оцениваются по критерию селекции $\Delta(1)_{\text{норм}}$. Если $\Delta(1)_{\text{норм}} > 0,05$ (т. е. минимум критерия неглубокий), то следует вводить в число аргументов переменные $1/x_1$, $1/x_1^2$, $1/x_1^3$ и т. д.

случайным образом пар не следует увеличивать более чем до двадцати. Именно при использовании такого случайного подхода к селекции (что соответствует селекции, наблюдаемой в природе) становится возможным решать задачи с числом аргументов до 1000 (включая запаздывающие аргументы).

Алгоритм с последовательным выделением трендов [8,70]. Представляет собой развитие идеи «остаточного» метода экстраполяции, применяемого в метеорологии. Обычно трендом называют кривую регрессии с одним аргументом — временем $y = y(t)$. В данном алгоритме и в алгоритмах, рассматриваемых ниже, это понятие расширяется. Трендами называются уравнения регрессии по любому одному аргументу: $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_m)$.

Описываемый алгоритм использует частные описания в классе сумм отдельных трендов:

$$y = a_0 + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_m + (x_m).$$

Каждый из трендов может быть полиномом любой степени от одного аргумента.

При построении алгоритма МГУА сначала выделяется первый тренд и вычисляется разность (первый остаток) истинных значений функции и тренда. Затем этот остаток аппроксимируется вторым трендом и находится вторая разность (второй остаток) и т. д. Практически удается выделить до пяти-шести трендов, причем этот процесс продолжают до тех пор, пока снижается критерий селекции (внешнее дополнение). При переборе трендов, с целью нахождения наиболее эффективного, в список кандидатов в переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ всегда следует включить время (текущее значение), даже если выделяется отдельный временной тренд $f(t)$. Измерять время с запаздываниями (как другие переменные) не нужно.

Алгоритм МГУА с мультипликативными моделями [24]. В этом алгоритме используются частные описания в классе произведений отдельных трендов:

$$y = a_0 f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_m(x_m).$$

Сначала выделяется первый тренд и вычисляется первое частное (первый поправочный коэффициент), затем вычисляется второй тренд, второй поправочный коэффициент и т. д. Деление и выделение сомножителей продолжается до тех пор, пока это способствует снижению критерия селекции.

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ МГУА

Обобщенный алгоритм МГУА [24, 72] является оптимальным в классе сумм любых элементарных функций (например, степенных полиномов).

Обобщенный алгоритм использует опорную функцию, включающую в себя как произведения, так и суммы трендов. Поэтому он действительно является обобщенным и дает самые точные модели. Состав членов опорной функции находится либо при помощи полного перебора вариантов (при малом числе аргументов), либо при помощи многорядной селекции комбинаций (селекция проекторов). Рассмотрим две основные разновидности обобщенного алгоритма МГУА.

Обобщенный алгоритм МГУА с полным перебором всех комбинаций трендов. При полном переборе вариантов результирующее значение критерия селекции тем меньше, чем больше соответствует опорная функция выражению искомого закона. Пользуясь этим правилом, можно подобрать оптимальную опорную функцию в классе сумм или произведений трендов. Расширенный перебор всевозможных комбинаций элементарных опорных функций практически осуществим только при сравнительно небольшом числе входных аргументов. Поэтому первым этапом обобщенного алгоритма является применение уже известного алгоритма последовательного выделения трендов, в результате чего число аргументов снижается до трех — пяти.

2*

Допустим, что в результате применения алгоритма МГУА с последовательным выделением трендов получено всего четыре тренда (кроме тренда по времени):

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4).$$

Тогда обобщенный алгоритм МГУА должен предусматривать перебор двенадцати комбинаций, реализующих класс сумм:

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2, x_3, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_1, x_3, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_3) + f_2(x_1, x_2, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_4) + f_2(x_1, x_2, x_3);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_3) + f_3(x_2, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_4) + f_3(x_2, x_3);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_3) + f_3(x_1, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_4) + f_3(x_1, x_3);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_3) + f_2(x_4) + f_3(x_1, x_2);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

В результате перебора указывается комбинация, дающая наиболее регулярное решение (минимум $\Delta(1)\%$). В качестве критерия регулярности используется, как обычно в алгоритмах МГУА, величина, обратная среднеквадратичной ошибке, измеряемой на отдельной проверочной последовательности данных. Первое слагаемое (функция времени) называется трендом, а остальные слагаемые — остатком.

Разделение точек (узлов интерполяции) на обучающую и проверочную последовательности рекомендуется выполнять по комбинированному способу регуляризации: при выводе временных трендов рекомендуется седьмой способ, а при выводе остатка — третий способ регуляризации. (Эти способы описаны ниже).

Обобщенный алгоритм МГУА позволяет найти оптимальное разделение процесса на составляющие, имеющие различные аргументы [76]. Практические примеры успешного прогнозирования случайных процессов показывают, что низкочастотные составляющие этих процессов следует рассматривать как функции одних аргументов, а высокочастотные — как функции других. При этом число аргументов, достаточно точно определяющих собой низко-

частотные составляющие, мало (один-два), а число аргументов для высокочастотных составляющих обычно велико.

Обобщенный алгоритм МГУА с многорядной селекцией проекторов. В предыдущем варианте обобщенного алгоритма МГУА выбор основывался на полном переборе всех возможных комбинаций аргументов. Такой перебор возможен только для малого числа аргументов (не более четырех — семи).

Принцип многорядной селекции комбинаций (самоорганизации) используется для сокращения перебора.

Известно, что метод наименьших квадратов можно рассматривать как операцию проектирования вектора выходной величины на плоскость аргументов. Теория проекторов (к которой мы вернемся в конце данной главы) рассматривает все алгоритмы МГУА как варианты применения последовательного проектирования векторов на каждом ряду селекции. Рассмотрим с этой точки зрения описанные выше алгоритмы МГУА и покажем, какое место занимает среди них обобщенный алгоритм МГУА с селекцией проекторов.

В основном алгоритме МГУА на каждом r — M -ом ряду селекции выходная величина φ проектируется на гиперплоскости пар переменных $[y_r^k, y_r^v]$. При этом происходит отбор (селекция) по критерию минимума среднеквадратической ошибки на проверочной последовательности наиболее регулярных значений y_{r+1}^i . Полное описание получают в виде полиномиального уравнения регрессии

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

исключая промежуточные переменные из частных описаний вида

$$y_{r+1}^i = f_{ii}(y_r^k, y_r^v).$$

В алгоритме МГУА с последовательным выделением трендов [72] выходная величина φ проектируется только на первом ряду. На втором и на последующих рядах селекции проектируется уже остаток $\Delta r = \varphi - f_r$ на ось наиболее эффективной переменной. Описание, приближающее функцию, имеет вид

$$\hat{f}_{n+1} = p_{i0}\varphi + p_{i1}\Delta_1 + \dots + p_{in}\Delta_n,$$

где $p_{il}\Delta_l$ — частное описание в виде полинома степени l ($0 \leq l \leq m$) по одной из наиболее эффективных переменных x_i ($1 \leq i \leq s_1$), отбираемых по коэффициенту корреляции; p_{ii} — оператор ортогонального проектирования («проектор») на подпространство $L_j = \{x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^m\}$ при ($1 \leq j \leq (m+1)s_1$), $j = (1, l)$.

Выбирая оператор P_{ii} различными способами, можно получить все известные алгоритмы МГУА, отличные как от основного алгоритма, так и от алгоритма с последовательным выделением трендов. Так, например, P_{ii} можно представить в виде суперпозиции

проекторов, отвечающих выбранному дереву МГУА. Следовательно, выражение для f_{n+1} задает множество алгоритмов МГУА, отличающихся по способу проектирования остатка.

Перебор алгоритмов по заданному критерию селекции позволяет найти оптимальный, обобщенный алгоритм МГУА. Вместо полного перебора проекторов для уменьшения размерности задачи рекомендуется применять поиск, основанный на принципах самоорганизации (селекции). Процесс селекции алгоритмов может быть представлен в виде дерева (рис. 5), в котором на каждом ряду r ($r > 1$) имеется $(m+1) S_1 F$ вершин k_r^i , где m — максимальная степень частного полинома, S_1 — число эффективных переменных, F — число остатков, отобранных в r -ом ряду. При $r=1$ дерево имеет

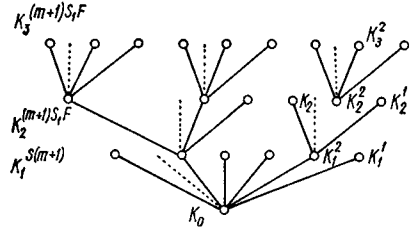


Рис. 5. Дерево алгоритма МГУА с последовательным выделением трендов (для $F=3$).

$S_1(m+1)$ узлов, а при $r=0$ — один (пустой) узел k_0 .

Из каждого узла K_r^i r -го ряда выходит $S_1(m+1)$ ветвей, тогда как в произвольный узел входит только одна ветвь. Фиксируя узел K_r^i , можно однозначно определить уравнение для f_{n+1} , которое ему соответствует.

Процесс селекции (отбора) в каждом ряду осуществляется в два этапа:

выделяется F остатков, по критерию минимума среднеквадратической ошибки на отдельной проверочной последовательности; каждый из остатков проектируется только на часть подпространства L_j ($1 \leq j \leq S(m+1)$) из переменных x_i ($1 \leq i \leq S_1$).

В общем случае, в зависимости от хода процесса селекции, дерево может быть произвольным. Целесообразность перебора различных способов проектирования оправдывается тем, что имеется возможность получить уравнения регрессии произвольной сложности, тогда как последовательное выделение трендов приводит к уравнению только одного вида класса сумм:

$$f_{n+1} = f_1(x_{i1}) + \dots + f_m(x_{im}),$$

в котором отсутствуют ковариации аргументов.

Если в уравнении регрессии для f_{n+1} ограничиться только первым слагаемым, где $P_{j,0}$ — оператор проектирования на все пространство, то алгоритм не отличается от обычного регрессионного анализа; если $P_{j,0}$ — суперпозиция операторов, отвечающая дереву МГУА, то получится основной алгоритм МГУА; если $P_{j,i}$ — проектор на подпространство $L_j = \{x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^m\}$ одной переменной, получим алгоритм с последовательным выделением трендов.

Сравнение и селекция по заданному критерию как этих двух крайних случаев, так и всех промежуточных используется для выбора модели оптимальной сложности. Оптимальный вид полного уравнения регрессии и соответствует обобщенному алгоритму МГУА.

Примеры показывают, что обобщенный алгоритм МГУА приводит к наиболее глубокому минимуму критерия селекции по сравнению с другими алгоритмами МГУА, и, следовательно, обеспечивает наиболее достоверные и точные результаты моделирования. Недостатком обобщенного алгоритма является большой объем вычислительной программы, особенно при большом числе аргументов.

ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ МГУА ДЛЯ ОТКРЫТИЯ ЗАКОНОВ

В обычных алгоритмах МГУА с каждым рядом селекции векторы переменных все больше приближаются к искомому решению. Уже после четырех-пяти рядов селекции это приводит к значительной линейной взаимной зависимости векторов и, как следствие, к плохой обусловленности матриц нормальных уравнений (результатом чего являются большие ошибки в определении коэффициентов частных описаний).

Для устранения коллинеарности в некоторых алгоритмах МГУА (например, в комбинаторных и в ортогонализованных) в последующих рядах селекции учитываются переменные первого ряда.

При трех аргументах x_1, x_2, x_3 частные описания будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{первый ряд:} \quad & y_1 = f(x_1 x_2), \quad y_2 = f(x_1 x_3), \quad y_3 = f(x_2 x_3); \\ \text{второй ряд:} \quad & z_1 = f(y_1 y_2), \quad z_2 = f(y_1 y_3), \quad z_3 = f(y_2 y_3); \\ & z_4 = f(y_1 x_1), \quad z_5 = f(y_1 x_2), \quad z_6 = f(y_1 x_3); \\ & \dots \dots \dots \\ & z_{13} = f(x_1 x_2), \quad z_{14} = f(x_1 x_3), \quad z_{15} = f(x_2 x_3). \end{aligned}$$

Частные описания с плохо обусловленными матрицами отбрасываются в процессе селекции, что может быть предусмотрено в вычислительной программе.

Для увеличения числа описаний на каждом ряду, связанного с учетом большого количества ковариаций, необходимо упростить процедуру их обработки. Это упрощение достигается следующими приемами.

Используются только линейные частные описания, но, чтобы не потерять точности, пространство исходных аргументов расширяется: вместе с ними рассматриваются также все ковариации аргументов. Например, при трех аргументах x_1, x_2, x_3 получим множество

из шести обобщенных аргументов

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x_3, \quad x_4 = x_1 x_2, \quad x_5 = x_1 x_3, \quad x_6 = x_2 x_3.$$

Используется прием попарной ортогонализации переменных в каждом частном описании. Обычное частное описание второго ряда имеет вид

$$z = a_0 + a_1 y_i + a_2 y_j,$$

а ортогонализированное частное описание —

$$z = y_i + A \hat{y}_j,$$

где $\hat{y}_j$ — вектор, ортогонализированный по отношению к вектору x_i .

При условии центрирования и нормирования переменных по среднему значению в ортогонализированных частных описаниях свободный член равен нулю ($a_0 = 0$), коэффициент при втором члене — единице ($a_1 = 1$), коэффициент при третьем члене

$$a_2 = A = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i y_j)}{\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2}.$$

Ортогонализация представляет собой такое линейное преобразование вектора y_j по отношению к базисному вектору y_i , после которого выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{j=N} y_i \hat{y}_j = 0.$$

Для этого достаточно, чтобы $\hat{y}_j = y_j - A y_i$, где

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i y_j)}{\sum_{i=1}^{i=N} y_i^2}.$$

Поясним прием ортогонализации на примере.

Пусть y_i (1, 2, 3, 4, 5), y_j (5, 4, 3, 2, 2), тогда

$$A = \frac{(1 \cdot 5) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (4 \cdot 2) + (5 \cdot 2)}{(1 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + (4 \cdot 4) + (5 \cdot 5)} = \frac{40}{55}.$$

Зная A , находим

$$\hat{y}_j = (4,2727; 2,5455; 0,8182; -0,90908; -1,6364).$$

Ортогонализация не только упрощает вид частных описаний, но и сводит решение систем нормальных уравнений Гаусса, которые

применяются для определения оценок коэффициентов этих описаний, к вычислению оценки одного коэффициента A_i .

Частное описание первого ряда селекции (после нормирования по среднему)

$$y_k = a_1 x_i + a_2 x_j \quad \text{либо} \quad y_k = A_i x_i;$$

частное описание второго ряда

$$z_k = y_i + A_k \hat{x}_j,$$

где k — номер пары переменных.

В рассматриваемом алгоритме МГУА в качестве критерия селекции используется так называемый «критерий относительной несмещенности».

КРИТЕРИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НЕСМЕЩЕННОСТИ

Относительную несмещенность частных описаний определяют следующим образом. В таблице исходных данных выделяют две последовательности данных. На одной из них определяют значения коэффициентов A^* в частном уравнении регрессии, а на другой — A^{**} . Лучшими по несмещенности считаются те описания, у которых относительное отклонение коэффициентов минимально, т. е.

$$n_{\text{см}} = \frac{A_i^* - A_i^{**}}{A_i^*} \rightarrow \min.$$

Кроме исходных x_1, x_2, x_3 , в качестве аргументов должны быть рассмотрены их ковариации по два $x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3$. Ковариация $x_1 x_2$ повторяет переменную x_3 (в примере, рассматриваемом ниже, равна t^3). Всего будет пять исходных обобщенных аргументов.

Для обобщенных аргументов попарно составляются линейные частные описания:

первый ряд

$$y = a_1 x_i;$$

второй ряд

$$z = y_i + A \hat{y}_j;$$

третий ряд

$$v = z_i + A \hat{z}_j \quad \text{и т. д.,}$$

где i и j — индексы обобщенных аргументов.

В частных описаниях второго, третьего и последующих рядов участвуют не только выходные переменные предыдущего ряда, но и пять исходных обобщенных аргументов.

Рассмотрим на примере применение одного из ортогонализированных алгоритмов МГУА, разработанных для «открытия» законов.

Пример 1. Восстановление закона по ортогонализированному алгоритму МГУА*. Допустим, искомый закон выражен уравнением $\Phi = 1 - t + t^2 - t^3$.

Введем обозначения: $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$. По значениям аргументов x_1 , x_2 , x_3 , приведенным в табл. 2, требуется восстановить указанный выше закон.

Таблица 2

Исходные данные для восстановления закона
 $\Phi = 1 - t + t^2 - t^3$

Точки	Переменные			
	x_1	x_2	x_3	Φ
1	-1	1	-1	4
2	0	0	0	1
3	1	1	1	0
4	2	4	8	-5
5	3	9	27	-20
6	4	16	64	-51

Для решения задачи разобьем имеющиеся данные на две последовательности: первая (точки 1, 2, 3, 4), вторая (точки 3, 4, 5, 6).

Исходные данные центрируются и нормируются по среднему значению.

При решении задачи восстановления законов большое значение имеет выбор способа нормирования исходных данных. В этом примере центрирование и нормирование переменных производилось отдельно для первой и второй последовательностей. В табл. 3 приведены результаты нормирования только для первой последовательности.

Значения переменных: $\bar{x}_1 = 1,5$, $\bar{x}_2 = 5,1666$, $\bar{x}_3 = 16,5$.

Среднее значение выходной величины $\bar{\Phi} = -11,8333$.

Будем решать задачу в пространстве обобщенных аргументов.

На первом ряду селекции лучшими по критерию несмещенности оказались частные описания:

$$y_1 = 1,0978x_1;$$

$$y_2 = 1,0509x_2;$$

$$y_3 = 1,1431x_3.$$

Показатели смещенности $n_{см}$ для этих описаний соответственно равны 0,100; 0,161; 0,004317.

Таблица 3
Значения центрированных и нормированных переменных

Точки	Переменные					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Φ
1	-1,6666	-8065	-1,0606	-0,9831	-1,0046	-1,338
2	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0845
3	-0,3333	-0,8065	-0,9393	-0,9831	-0,9954	-1,0
4	0,3333	-0,2258	-0,5152	-0,7296	-0,8522	-0,5775
5	1,0	0,7419	0,6364	0,369	0,1224	0,6901
6	1,6666	0,2097	2,8788	3,3268	3,7298	3,3099

На втором ряду селекции множество обобщенных аргументов составляют переменные y_1, y_2, y_3 и x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (ковариации переменных $x_i y_j$ в линейных вариантах МГУА не вводим). Наименее смещенные частные полиномы этого ряда:

$$z_1 = 0,82y_1 + 0,2505x_1, \quad (n_{см} = 0,062);$$

* При возможности планирования активного эксперимента желательно сразу получать ортонормированные данные. Пример написан совместно с аспирантом В. Н. Высоцким.

$$z_2 = 1,181y_3 - 0,2481x_2, \quad (n_{см} = 0,0956);$$

$$z_3 = 0,9281y_3 - 0,0925x_1, \quad (n_{см} = 0,0936).$$

Третий и последующие ряды селекции подобны предыдущим. Правило остановки: ряды селекции наращиваются до тех пор, пока смещенность уменьшается. На последнем ряду выбирается одно наилучшее, наиболее несмещенное уравнение регрессии.

В данном примере смещенность описаний в пределах точности вычислений падала до четвертого ряда включительно. Полученное уравнение в развернутой форме

$$\hat{\Phi} = 0,1269x_1 - 0,4371x_2 + 1,397x_3$$

после перехода к исходному отсчету величин аргументов (с точностью вычислений четыре знака после запятой) совпадает с исходной зависимостью $\Phi = 1 - x_1 + x_2 - x_3$.

Задача открытия закона по небольшому числу экспериментальных точек решена.

В первом примере рассмотрено применение алгоритма МГУА для решения задачи восстановления закона, заданного в виде полинома третьей степени. Теперь рассмотрим выделение степенного тренда, степень которого заранее неизвестна.

Пример 2. Выделение тренда оптимальной сложности. Рассмотрим задачу аппроксимации случайного процесса функции одного аргумента — времени. Как указывалось, уравнения регрессии с одним аргументом часто называют трендами. Следовательно, рассматривается задача выделения временного тренда случайного процесса по алгоритму МГУА.

Число заданных точек обозначим N , а степень полинома регрессии — $q = (k - 1)$, где k — число коэффициентов полинома. МГУА позволяет работать в области, где $N \ll k$ и где обычно получаются самые точные аппроксимации. Выделение тренда оптимальной сложности по алгоритму МГУА разработано как для полиномиальных, так и для гармонических опорных функций. Рассмотрим первый случай.

Можно аппроксимировать среднюю линию (тренд) квазистационарного процесса $\Phi(t)$, заданного рядом узлов интерполяции, например при помощи параболы q -й степени:

$$\Phi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_q t^q,$$

где q может быть весьма велико (например, $q = 128$ и т. п.).

Оптимальное значение степени q можно найти расчетом и сравнивая ряд значений q по критерию минимума среднеквадратичной ошибки на отдельной проверочной последовательности.

После переобозначения переменных получим

$$\Phi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_q x_q.$$

Это уравнение и является в данной задаче полным описанием. Построение оптимального нелинейного тренда с линейными полиномами по алгоритму МГУА: Частные описания первого ряда селекции:

$$y_1 = a'_0 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2; \quad y_2 = a''_0 + a''_1 x_1 + a''_2 x_2;$$

$$y_s = a^{(s)}_0 + a^{(s)}_1 x_{q-1} + a^{(s)}_2 x_q,$$

где $s = C_q^2$.

Частные описания второго ряда селекции:

$$z_1 = b'_0 + b'_1 y_1 + b'_2 y_2, \quad z_2 = b''_0 + b''_1 y_1 + b''_2 y_2, \quad \dots$$

$$z_p = b^{(p)}_0 + b^{(p)}_1 y_{s-1} + b^{(p)}_2 y_s,$$

где $p = C_s^2$.

Достаточно знать по крайней мере пять узлов интерполяции (четыре в обучающей и один — в проверочной последовательности), чтобы получить оценки

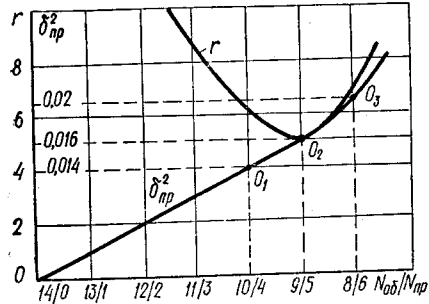


Рис. 6. Определение оптимального разделения данных на обучающую и проверочную последовательности. Точка O_2 соответствует модели оптимальной сложности.

но ранжированных, например, по дисперсии от среднего значения), можно найти минимум числа рядов селекции r , чем обеспечивается более высокая достоверность решающей функции (рис. 6).

ТЕОРИЯ ПРОЕКТОРОВ КАК ОБОСНОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ МГУА *

Как известно, метод наименьших квадратов можно представить графически в виде операции проектирования вектора выходной величины на плоскость векторов аргументов. При этом ошибка (разности вектора выходной величины и его проекции) всегда меньше разностей того же вектора и каждого из векторов аргументов (рис. 7).

В теории проекторов последовательно используется несколько таких операций проектирования, каждая — для одного ряда селекции, чтобы показать, что ошибка на обучающей последовательности с каждым рядом селекции только падает. Теория проекторов доказывает монотонное убывание ошибки в общем виде для линейных частных описаний. Из этого следует, что при селекции можно получить сколь угодно малую ошибку (на обучающей последовательности).

* Теория проекторов разрабатывалась совместно с аспирантами П. И. Ковальчуком и Н. Н. Тодуа.

Следовательно, если устранить в алгоритмах МГУА селекцию (т. е. пропускать из ряда в ряд все пары аргументов) и обеспечить достаточно широкую селекцию при сохранении большой свободы выбора (т. е. обеспечить «фиксацию базиса»), то многорядность алгоритмов МГУА не приводит к потере оптимальных математических моделей.

Вопрос о возможности потери наиболее точных моделей при многорядной селекции по алгоритмам МГУА — единственный, требующий обоснования в теории МГУА. Теория проекторов является таким обоснованием, так как отвечает на этот вопрос. Она утверждает, что хотя при переходе от обычного полного перебора к многорядному некоторые математические модели могут быть потеряны, среди них нет оптимальной, т. е. наиболее точной, модели.

Второй вопрос — усечение объема многорядного перебора при селекции по второму эвристическому критерию — в теории проекторов решается так: уменьшать объем перебора можно по любому критерию, лишь бы не нарушать во всех рядах селекции базис проекции. При небольших нарушениях базиса появляется так называемая ошибка от многорядности, хотя обычно она очень мала. Условием устранения этой ошибки является «фиксация базиса»*: число переменных в каждом ряду должно быть не меньше определенного числа, равного разности числа переменных и числа степеней свободы модели.

Выбор эвристического критерия не подлежит математическому обоснованию, он является выражением цели человека. Наиболее эффективный — критерий баланса переменных, хотя его приходится комбинировать с критериями регулярности и несмещенности.

Все эти вопросы составляют основу теории МГУА.

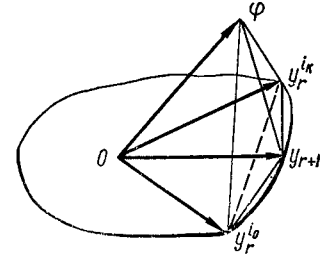


Рис. 7. Проекция вектора Φ_{in} на подпространство $L_j = \{y_r^i; y_{r+1}^i\}$.

ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ МГУА

Рассмотрим следующую задачу: на плоскости $\phi - t$ задано некоторое небольшое число узлов интерполяции (точек).

Требуется найти уравнение временного тренда по критерию минимума среднеквадратичной ошибки в виде полного степенного полинома Колмогорова — Габора, число членов которого больше

* Между «свободой выбора» F и «базисом» есть небольшая разница. Базис предъявляет требования не только к числу, но и к составу селектируемых переменных [34].

числа точек ($k > N$), а степень равна $q = (k - 1)$. Данная задача является неопределенной, так как, например, через три заданные точки можно провести бесконечное число кривых четвертого порядка, каждая из которых будет отвечать минимуму (равному нулю) одного критерия: среднеквадратичной ошибке, определяемой на всех трех точках.

Чтобы доопределить задачу, перейдем к выбору оптимального уравнения регрессии не по одному, а по двум критериям. Для этого разобьем заданное число точек на две части: например, пусть $N_{\text{об}} = n_1$ точек и $N_{\text{пр}} = n_2$ точек, где $(n_1 + n_2 = N < k)$. В качестве первого критерия используем среднеквадратическую ошибку на множестве точек $N_{\text{об}}$, в качестве второго критерия среднеквадратическую ошибку на множестве точек $N_{\text{пр}}$.

Единственность определения кривой регрессии при $N < k$ по указанным двум критериям заключается в том, что эти критерии используются не один раз (как в обычном регрессионном анализе), а многократно. Одни и те же точки используются для нахождения оценок многих коэффициентов.

Для этого полный степенной полином Колмогорова — Габора

$$\varphi = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n x_n + \sum \sum a_{n_1 n_2} x_{n_1} x_{n_2} + \sum \sum \sum a_{n_1 n_2 n_3} x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3} + \dots$$

записывается в виде многорядной системы полиномов с меньшим числом членов. Каждая часть полинома рассматривается как самостоятельное частное уравнение регрессии, решающее ту же задачу восстановления функции по ряду точек. Минимальное число точек, необходимое для однозначного определения оценок коэффициентов, на единицу больше числа членов частного полинома*, имеющего большое число членов: причем одни и те же точки можно использовать для восстановления как всех частных полиномов, так и их полного полинома.

Рассмотрим, например, полный полином четвертой степени

$$\varphi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4.$$

Этот полином можно представить в виде многорядной системы полиномов следующего вида:

$$y_1 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2;$$

$$y_2 = b_3 t^3 + b_4 t^4;$$

$$Z = c_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Наибольшее число членов полинома равно трем, следовательно, для нахождения оценок всех коэффициентов достаточно четырех

точек (алгебраический минимум). При определении оценок b_0 , b_1 и b_2 полагаем $y_1 = \varphi$, для b_3 и b_4 $y_2 = \varphi$, а при определении оценок коэффициентов c_1 и c_2 считаем $Z = \varphi$. Этот прием позволяет получить оценки коэффициентов полиномов с любым числом членов, имея всего четыре точки на обучающей последовательности. Однако для стационарных процессов достоверность оценок тем выше, чем больше точек, подлежащих усреднению. Для квазистационарных процессов имеется оптимум числа учитываемых точек, последних по времени наблюдения. При слишком длительном наблюдении объект успевает настолько изменяться, что достоверность моделирования начинает падать. Достоверность можно оценить по второму критерию — величине среднеквадратичной ошибки, измеряемой на отдельной проверочной последовательности данных.

Сформулируем следующие теоремы теории МГУА:

Теорема 1. При любом разделении полного полинома заданной степени $q = (k - 1)$ на частные полиномы критерий минимума среднеквадратичной ошибки, определяемой на обучающей последовательности (первый критерий), позволяет однозначно определить оптимальные оценки всех коэффициентов (как частных, так и полного полиномов), если число точек в обучающей последовательности больше числа членов каждого из частных полиномов по крайней мере на единицу.

Теорема не требует доказательства, так как основана на обычном регрессионном анализе. Заметим, что под названием «коэффициенты полного полинома» понимаются величины, близкие к значениям коэффициентов полного полинома, восстановленного обычным способом, но не равные им точно: *

$$a_0 = (c_0 + b_0 c_1), a_1 = b_1 c_1, a_2 = b_2 c_1, a_3 = b_3 c_2, a_4 = b_4 c_2.$$

В результате многорядной процедуры получается большое *множество* математических моделей — полиномов. Это множество можно по желанию сделать конечным и дискретным, либо бесконечным и непрерывным. В первом случае определению подлежат все коэффициенты, во втором — некоторым из них произвольно задается непрерывный ряд значений. Так, например, в работе (44) некоторые коэффициенты сразу приравняются нулю. Чем больше множество, тем выше точность результирующей *единственной* модели.

Ограничимся рассмотрением только конечных и дискретных множеств полиномов.

Первую теорему теории МГУА, устанавливающую возможность получения оптимальных оценок уравнения регрессии в результате многорядной процедуры, более точно можно сформулировать так:

* Вопрос о том, какая модель более точно воспроизводит истинную функцию (по алгоритму регрессионного анализа или по МГУА) при степени полинома, определяемого по критерию $\Delta(1) \rightarrow \min$, решается в пользу МГУА, если число узлов интерполяции менее 100—150.

для получения оценок коэффициентов частных полиномов на первом ряду селекции необходимо, чтобы число узлов интерполяции (точек) равнялось числу определяемых коэффициентов;

для получения оценок коэффициентов на втором и последующих рядах селекции необходимо располагать числом точек, по крайней мере на единицу превышающим число определяемых в них коэффициентов.

Определение частных описаний по методу наименьших квадратов эквивалентно нахождению проекций вектора $\vec{\varphi}$ на всевозможные подпространства $L_{m+1} = \{\vec{x}_i, \vec{e}\}$.

В этом случае все проекции равны вектору φ , а определитель Грамма $D(\varphi, \varphi, \vec{e})$ для произвольной пары второго ряда равен нулю. Следовательно, при числе рядов селекции $r = 1$ процесс селекции заканчивается, что и доказывает первую часть теоремы. При $N = \xi$ (где N — число точек, ξ — число коэффициентов частного описания) проекции не равны между собой и сохраняется возможность «свободы выбора» коэффициентов уравнения регрессии в рядах выше первого.

Теорема 2. При заданной степени полного полинома $q = (k - 1)$ имеется много комбинаций (вариантов) разбиения его на частные полиномы. Полный перебор всех комбинаций по второму критерию (среднеквадратичной ошибке, измеряемой на отдельной проверочной последовательности данных) позволяет найти *единственное* наилучшее разделение (или несколько равных по точности).

Теорема доказывается в теории дискретных множеств. Множество действительных положительных чисел (ошибок) всегда можно ранжировать по величине и выбрать одно наименьшее число (или несколько малых и равных друг другу).

Если полный перебор всех вариантов слишком велик для имеющейся в распоряжении машины, то применяются пороговые самоотборы заданного числа наиболее точных полиномов на каждом ряду, т. е. реализуется алгоритм самоорганизации (селекции) модели. В этом и состоит основная сущность селекционных алгоритмов МГУА. Для непрерывных множеств полиномов алгоритмы МГУА еще не разработаны.

В следующем примере поясняется структура многорядных алгоритмов МГУА, в которых полные полиномы Колмогорова — Габора заменяются системой коротких частных полиномов или описаний.

Пример 3. Замена полных полиномов частными. Допустим, заданы всего четыре точки ($N = 4$), координаты которых: $\varphi_1 t_1, \varphi_2 t_2, \varphi_3 t_3, \varphi_4 t_4$. В обучающую последовательность включаем первые три точки, а в проверочную — четвертую.

Если $k = 4$, полный полином Колмогорова — Габора имеет вид

$$\varphi = a_0 + at + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

при $x_0 = 1, x_1 = t, x_2 = t^2, x_3 = t^3$.

Этот полином можно преобразовать к двучленному* различными способами.

* Примеры показывают, что чем меньше задано узлов интерполяции (точек) и чем больше зашумлены они помехами, тем больше преимущество коротких (двух- и трехчленных) частных описаний в смысле уменьшения ошибки на проверочной последовательности. Благодаря применению коротких частных описаний резко сокращается полный перебор всех возможных комбинаций полиномов, поэтому они наиболее рекомендуемы.

Число возможных при этом комбинаций $\frac{1}{2} C_4^2 = 3$.

$$\varphi = (a_0 x_0 + a_1 x_1) + (a_2 x_2 + a_3 x_3);$$

$$\varphi = (a_0 x_0 + a_2 x_2) + (a_1 x_1 + a_3 x_3);$$

$$\varphi = (a_0 x_0 + a_3 x_3) + (a_1 x_1 + a_2 x_2).$$

Введем промежуточные переменные:

$$y_1 = b_{0-1} x_0 + b_{1-1} x_1, \quad y_2 = b_{0-2} x_2 + b_{1-2} x_3,$$

$$y_3 = b_{0-3} x_0 + b_{1-3} x_2, \quad y_4 = b_{0-4} x_1 + b_{1-4} x_3,$$

$$y_5 = b_{0-5} x_0 + b_{1-5} x_3, \quad y_6 = b_{0-6} x_1 + b_{1-6} x_2.$$

Тогда исходный полином можно представить в одном из следующих видов:

$$z = \varphi = c_{0,-1} y_1 + c_{1,-2} y_6;$$

$$z = \varphi = c_{0,-3} y_3 + c_{1,-4} y_4;$$

$$z = \varphi = c_{0,-5} y_5 + c_{1,-6} y_6.$$

При двучленном разложении полного полинома число рядов равно $(k-1) - 1 = 3 - 1 = 2$. Не требует доказательства то, что оценки коэффициентов ($b_{0,-1}, b_{1,-1}, b_{0,-2}, b_{0,-3}, b_{0,-5}, b_{1,-5}, b_{0,-2}, b_{1,-2}, b_{0,-4}, b_{1,-4}, b_{0,-6}, b_{1,-6}$) можно получить по методу наименьших квадратов, т. е. в данном примере по трем точкам обучающей последовательности, если принять $y_i = \varphi$. Так же очевидно, что оценки коэффициентов $c_{0,-1}, c_{1,-2}, c_{0,-3}, c_{1,-4}, c_{0,-5}, c_{1,-6}$ можно получить тем же способом. Остается из трех видов полинома выбрать единственный, тот, который дает наименьшую ошибку на четвертой точке проверочной последовательности.

Если $k = 8$, полный полином имеет вид

$$\varphi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_7 t^7 = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_7 x_7$$

при $x_0 = 1, x_2 = t^2, x_1 = t, x_3 = t^3, x_7 = t^7$.

Полином можно привести к двучленному также различными способами.

Проще всего использовать три ряда переменных:

$$y = a_0 x_i + a_1 x_j;$$

$$Z = b_0 y_i + b_1 y_j;$$

$$\varphi = v = c_0 z_i + c_1 z_j,$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, 7$.

Оценки коэффициентов уравнений каждого ряда можно получить по методу наименьших квадратов, если число точек обучающей последовательности равно или больше трех. Из всех возможных комбинаций переменных выбираем единственную, дающую минимальную квадратичную ошибку на отдельной проверочной последовательности.

Итак, при заданной степени полинома алгоритмы МГУА позволяют восстановить единственную оптимальную математическую модель.

Теорема 3. При постепенном нарастании степени полного полинома до некоторого ограниченного значения

$$(k-1) = 1, 2, 3, \dots, r, \dots, k_{\max}$$

ошибка на проверочной последовательности либо непрерывно падает, либо имеет минимум по крайней мере при одном значении степени.

Для доказательства рассмотрим выражение

$$\min_{k_{\min} \leq r \leq k_{\max}} \left\{ \min_{\{x_m\}} [\delta_{\text{пр}}^2] \right\} = \min_{k_{\min} \leq r \leq k_{\max}} \left\{ \min_{\{x_m\}} \sum_{i=1}^{k_2} \times \right. \\ \left. \times \left[y_i - \sum_{m=k_1}^2 x_m \Phi_m(t_i) \right]^2 \right\}.$$

Согласно теоремам 1 и 2, выражение в фигурных скобках достигает своего минимального значения $\min_{\{x_m\}} [\delta_{\text{пр}}^2] = [\delta_{\text{пр}}^2(r)]$ при $x_{k_1} =$

$= a_{k_1}, \dots, x_2 = a_2$. Тогда

$$\min_{1 \leq r \leq k_{\max}} \left\{ \min_{\{x_m\}} [\delta_{\text{пр}}^2] \right\} = \min_{1 \leq r \leq k_{\max}} \{ [\delta_{\text{пр}}^2(r)] \} = [\delta(r^*)].$$

Значение $r = r^*$ является той степенью полинома, при которой ошибка на проверочной последовательности достигает минимального значения.

Для доказательства теоремы достаточно ограничиться первым минимумом ошибки, отвечающим более низкой степени полинома $r_{\min}$ уравнения регрессии (правило «левого угла»). При этом доопределение кривой регрессии по двум критериям дает единственный ответ даже при переменной степени полного полинома $(k - 1) = \text{var}$, что и требовалось доказать.

Уравнение регрессии, отвечающее глобальному минимуму ошибки, является *уравнением оптимальной сложности*.

Использование N точек не дает однозначного уравнения регрессии порядка $(k - 1)$ при $k < N$. Но достаточно было N_1 точек оставить для проверки, как задача решается однозначно, причем удастся найти единственное уравнение регрессии оптимальной сложности, понятие которой определено выше.

Следует отметить, что чем меньше точек остается для проверочной последовательности, тем меньше среднеквадратичная ошибка $\delta_{\text{пр}}^2$ (рис. 6), однако для достоверности проверочная последовательность должна содержать около 30—40% всех имеющихся точек.

Теорема 4. Если точки ранжированы по величине дисперсии (среднеквадратичного отклонения от среднего), то имеется единственное значение отношения числа точек проверочной последовательности к числу точек обучающей последовательности, при котором достигается минимум числа рядов селекции и степени полного полинома (оптимум сложности модели; см. рис. 6).

Доказательства теоремы еще нет. Она установлена аспирантом Н. Н. Тодуа в результате просчета многих примеров. Ниже будут даны некоторые пояснения к этой теореме.

Теорема 5 (о невозрастании среднеквадратической ошибки на обучающей последовательности в алгоритмах МГУА).

Синтез объективного уравнения регрессии по алгоритмам МГУА должен заключаться как в выборе оптимальной степени аппроксимирующего многочлена, так и в наиболее точном отображении (например, в смысле минимизации среднеквадратической ошибки) экспериментальных данных. Экспериментально установлено, что среднеквадратическая ошибка на обучающей последовательности убывает при увеличении числа рядов селекции. Однако остается открытым вопрос о том, является данный факт общей закономерностью в алгоритмах МГУА или следствием целесообразного выбора второго эвристического критерия.

Эта теорема устанавливает, что в многорядном процессе алгоритмов МГУА среднеквадратическая ошибка от ряда к ряду не может возрастать независимо от пути, по которому идет селекция.

Введем некоторые понятия и определения. Известно, что процесс селекции можно представить в виде дерева, каждый узел которого имеет номер $k_r (i_1, i_2, \dots, i_{2r-1}, \dots, i_{2r})$, где r — номер ряда селекции; $i_1, i_2, \dots, i_{2r}$ — номера отобранных переменных. Из верхнего узла получается два нижних: номер первого образует-ся из 2^{r-1} символов последовательности $i_1, i_2, \dots, i_{2r}$, а номер второго — из остальных.

Путем на дереве назовем произвольную цепочку $k(i): k_0(i_1) \rightarrow k_1(i_1, i_2) \rightarrow k_2(i_1, i_2, i_3, i_4) \rightarrow \dots \rightarrow k_r(i_1, \dots, i_2)$, в которой из каждого ряда селекции присутствует один и только один узел, причем любой предыдущий узел порождается последующим. Каждому такому пути однозначно соответствует последовательность среднеквадратических ошибок $\delta^2(i): \delta_0^2(i_1), \delta_1^2(i_1, i_2), \dots, \delta_r^2(i_1, i_2, \dots, i_{2r})$.

Тогда справедлива такая теорема: для всякого пути произвольно выбранного дерева последовательность ошибок монотонно не возрастает.

Доказательство. Рассмотрим выражение для определения коэффициентов полинома в произвольном r -ом ряду:

$$\delta_r^2(i_1, i_2, \dots, i_{2r}) = \min_{\vec{\alpha}} \sum_{i=1}^N [\Phi_i - \alpha_0 - \alpha_1 z_{r-1}^i \times \\ \times (i_1, \dots, i_{2r-1}) - \alpha_2 z_{r-1}^i (i_k, \dots, i_{2r})].$$

Заметим, что при $\vec{\alpha} = (0, 1, 0)$

$$\delta_r^2(i_1, \dots, i_{2r}) = \delta_{r-1}^2(i_1, \dots, i_{2r-1}),$$

а при $\vec{\alpha}^* = (0, 0, 1)$

$$\delta_{r-1}^2(i_k, \dots, i_{2r}).$$

Предположим, что (δ_r^2) достигает минимального значения (не обязательно единственного) в точке $\vec{\alpha}^* = \alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*$.

Теорему будем доказывать от противного. Пусть существует цепочка $k_{r-1}(i_1, \dots, i_{2r-1}) \rightarrow k_r(i_1, \dots, i_{2r})$, для которой

$$\delta_{r-1}^2(i_1, \dots, i_{2r-1}) < \delta_r^2(i_1, \dots, i_{2r})$$

$$\text{или} \quad \sum_{i=1}^N [\varphi_i - z_{r-1}^i(i_1, \dots, i_{2r-1})]^2 < \sum_{i=1}^N [\varphi_i - \alpha_0^* - \alpha_1^* z_{r-1}^i \times \\ \times (i_1, \dots, i_{2r-1}) - \alpha_2^* z_{r-1}^i(i_1, \dots, i_{2r})]^2.$$

Последнее неравенство противоречит условию минимума в точке $\vec{\alpha}^*$. Следовательно, теорема доказана.

Следствие 1.

$$\delta_r^2(i_1, \dots, i_{2r}) \leq \min [\delta_{r-1}^2(i_1, \dots, i_{2r-1})(i_k, \dots, i_{2r})].$$

Следствие 2. Если $\delta_r^2(i_1, \dots, i_{2r}) = 0$, то на любом дереве она равна нулю в произвольном узле цепочки $k(i)$ после $k_r(i_1, \dots, i_{2r})$, включая данный узел, и на всяком пути, который проходит через последний.

Доказанная теорема и ее следствия распространяются на все полиномиальные алгоритмы МГУА.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА МГУА ЗА КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ШАГОВ *

Сформулируем и докажем несколько утверждений, из которых следует сходимость многорядной процедуры за конечное число шагов.

Пара векторов $[y_r^{i_v}, y_r^{i_k}]$ называется вырожденной, если для заданного $\varepsilon > 0$ определитель Грамма $D(y_r^{i_v}, y_r^{i_k}) < \varepsilon$.

Лемма 1.** Пусть $D(y_r^{i_1}, y_r^{i_2}, \dots, y_r^{i_{m+1}})$ — определитель Грамма системы линейно независимых векторов r -го ряда селекции. Тогда, если $\|y_r^{i_k} - y_r^{i_v}\| < \delta$, то $D(y_r^{i_1}, \dots, y_r^{i_{m+1}}) < \varepsilon$ равномерно относительно r .

* Раздел написан совместно с аспирантами П. И. Ковальчуком и Н. Н. Тодуа.

** Лемма 1 является основанием утверждения о том, что при достаточной величине F многорядная селекция не теряет результата полного перебора (основное утверждение теории МГУА).

Доказательство. Согласно пятой теореме для совокупности векторов $\varphi - y_r^{i_k} (k = 1, \dots, n)$, находящихся в шаре

$$W_r(\varphi, R)_{\text{опр}} \triangleq \{y_r^{i_k} \in L_r; \|\varphi - y_r^{i_k}\| \leq R_r\},$$

выполняется неравенство $R_r \leq R_0 (r = 1, \dots, \infty)$, где

$$R_r = \max_{\{i_k\}} \|\varphi - y_r^{i_k}\|.$$

Рассмотрим разложение определителя Грамма по k -му столбцу (вычитая из k -го v -й столбец):

$$D(y_r^{i_k} - y_r^{i_{m+1}}) = (y_r^{i_k} - y_r^{i_v}, y_r^{i_1}) D_{1k} + \dots + (y_r^{i_k} - y_r^{i_v}, y_r^{i_{m+1}}) \times \\ \times D_{m+1,k}.$$

Воспользуемся неравенством Буняковского — Шварца

$$|(y_r^{i_k} - y_r^{i_v}, y_r^{i_1})| \leq \|y_r^{i_k} - y_r^{i_v}\| \|y_r^{i_1}\|$$

и тем, что $\|y_r^{i_k}\| \leq N (r = 1, \dots, \infty)$ и $|D_{k,l}| \leq M$ — непрерывные функции в ограниченном замкнутом множестве (шаре $w_0(\varphi, R)_{\text{опр}}$).

Тогда при $\|y_r^{i_k} - y_r^{i_v}\| \delta$

$$D(y_r^{i_1}, \dots, y_r^{i_{m+1}}) \leq (m+1)MN \|y_r^{i_k} - y_r^{i_v}\| < \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Из исходного множества пар $[y_r^{i_k}, y_r^{i_v}] \in W_r$ r -го ряда выделим подмножество

$$W_r(\varepsilon) = \{[y_r^{i_k}, y_r^{i_v}] : D(y_r^{i_k}, y_r^{i_v}) > \varepsilon\}.$$

Лемма 2. Пусть $[y_r^{i_k}, y_r^{i_v}] \notin W_r(\varepsilon)$. Тогда для произвольного r

$$\max_{\{w_r^{(e)}\}} \|\varphi - y_r^{i_k}\| - \max_{\{w_{r+1}^{(e)}\}} \|\varphi - y_{r+1}^{i_v}\| \geq \gamma > 0.$$

Доказательство. Из неравенства сторон треугольника (рис. 7) получаем

$$2 \max \{\|y_{r+1} - y_r^{i_k}\|, \|y_{r+1} - y_r^{i_v}\|\} \geq \|y_r^{i_k} - y_r^{i_v}\|,$$

где y_{r+1} — проекция φ на подпространство $L_l = \{y_r^{i_k}, y_r^{i_v}\}$. Кроме того,

$$\|\varphi - y_r^{i_v}\|^2 = \|y_{r+1} - y_r^{i_v}\|^2 + \|\varphi - y_{r+1}\|^2.$$

Если максимум среднеквадратичной ошибки достигается при y_2^i , то с учетом этих соотношений можно записать

$$\begin{aligned} \|\varphi - y_r^i\| - \|\varphi - y_{r+1}\| &= \frac{\|y_{r+1} - y_r^i\|}{\|\varphi - y_r^i\| + \|\varphi - y_{r+1}\|} \geq \\ &\geq \frac{\|y_r^i - y_{r+1}^i\|^2}{4(\|\varphi - y_r^i\| + \|\varphi - y_{r+1}\|)} \geq \frac{\delta^2}{4(\|\varphi - y_r^i\| + \|\varphi - y_{r+1}\|)} \geq \frac{\delta^2}{8R_0}, \end{aligned}$$

где R_0 — радиус начального шара.

Следствие 1. Максимум среднеквадратичской ошибки * на множество $W_r(\epsilon)$ строго убывает, т. е. $R_0 > R_1 > \dots > R_r > \dots$

Следствие 2.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\{W_r\}} \|\varphi - y_r^i\| = \alpha.$$

Следствием доказанных лемм является также следующая теорема.

Теорема 6 (о вырождении пар переменных). Пусть $R_0 = \max_{\{W_0\}} \|\varphi - y_0^i\|$ и множество пар $[y_r^i, y_r^j] \in W_r(\epsilon)$, тогда не более чем за $l = \frac{R_0}{\gamma} = \frac{8R_0}{\delta^2}$ шагов все комбинации элементов (пары) вырождаются.

Практически это означает, что при слишком большом числе рядов селекции матрицы коэффициентов частных полиномов становятся плохо обусловленными.

ОБЪЯСНЕНИЕ «ОШИБКИ МНОГОРЯДНОСТИ»

Теорема о вырождении указывает на сходимость алгоритма. Однако качественные свойства этого решения в значительной степени зависят от выбора второго эвристического критерия. Это решение, как правило, не совпадает точно с решением, получаемым по методу наименьших квадратов при той же степени полинома, что указывает на наличие ошибки многорядности или методической ошибки.

Рассмотрим возможность ее возникновения. Пусть имеется последовательность подпространств

$$L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2, \dots, \supseteq L_{r-1} \supseteq L_r \supseteq, \dots,$$

причем $L_{r-1} \supset L_r$ — строгое включение.

Это — необходимое условие возникновения методической ошибки, так как минимум функции $\|\varphi - y_r^i\|$ на подпространстве L_r может оказаться больше минимума этой же функции на подпро-

* Ошибка убывает независимо от пути, который определяется выбором второго эвристического критерия — критерия селекции.

странстве L_{r-1} . Последнее означает, что решение в подпространстве L_r всегда дает среднеквадратическую ошибку, большую, чем по методу наименьших квадратов.

Очевидно, что необходимым и достаточным условием устранения методической ошибки является выполнение неравенства

$$\min_{y_r^i \in L_r} \|\varphi - y_r^i\| < \min_{y_{r-1}^i \in L_{r-1}} \|\varphi - y_{r-1}^i\|.$$

При выполнении этого условия минимум кривой $\Delta(1)$ будет лежать на кривой $\Delta(2)$ (см. рис. 1).

А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд показали, что непрерывные функции многих переменных можно выразить не приближенно, а точно через конечное число подобных функций, но от двух переменных. Например,

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = f(f(x_1 x_2), f(x_3 x_4)).$$

Последнее означает, что в МГУА всегда можно найти частные описания $f(x_1 x_2)$ и $f(x_3 x_4)$, при которых не будет потерян ни один член полного описания $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$.

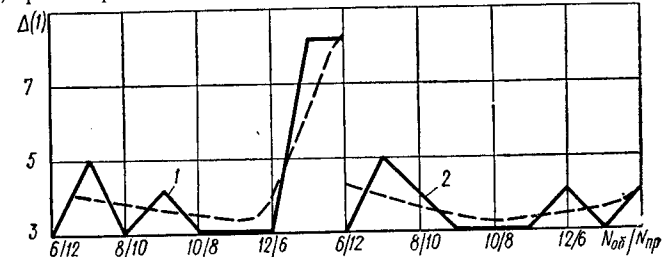


Рис. 8. График зависимости ошибки $\Delta(1)$ на проверочной последовательности от соотношения числа точек в обучающей и проверочной последовательностях: 1 — без помех в трех последних точках; 2 — с помехами в этих же точках. Пунктиром проведена средняя линия.

На этом основании аспиранткой Н. А. Ивахненко предложено ввести в частные описания соответствующие дополнительные члены [34]. Например, в задаче с четырьмя аргументами x_1, x_2, x_3, x_4 рекомендовались частные описания вида:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_1^2 + a_{41}x_2^2 + a_{51}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4); \\ y_2 &= a_{02} + a_{12}x_3 + a_{22}x_4 + a_{32}x_3^2 + a_{42}x_4^2 + a_{52}(x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3). \end{aligned}$$

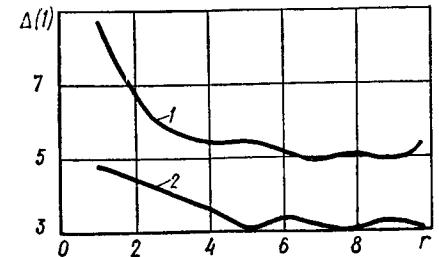


Рис. 9. График зависимости ошибки $\Delta(1)$ на проверочной последовательности от номера ряда селекции при $N_{об}/N_{пр} = 14/4$ в трех (1) и в двух (2) последних точках.

Таблица 4
Исходные данные к примеру 4

Номера точек	Варианты			
	I		II	
	t	φ	t	φ
1	-3	364	4	-819
2	4	-819	-3	364
3	3	-182	-2,6	192
4	-2,6	192	3,0	-182
5	-2,2	93,6	-2,2	93,6
6	2,6	-85,5	2,6	-85,5
7	2,2	-35,1	-1,8	41,2
8	-1,8	41,2	2,2	-35,1
9	-1,4	16,3	-1,4	16,3
10	1,8	-11,7	1,8	-11,7
11	1,4	-2,72	-1,0	6,00
12	-1,0	6,00	1,4	-2,72
13	-0,6	2,38	-0,6	2,38
14	1,0	0,00	-0,2	6,00
15	0,6	0,595	0,6	0,595
16	-0,2	1,94	1,0	0,00
17	0,2	0,833	0,2	0,833
18	0	1,00	0	1,00

В качестве дополнительных членов можно использовать одну из двух комбинаций:

$$x_1x_3 + x_1x_4 \text{ и } x_2x_3 + x_1x_4,$$

или

$$x_1x_2 + x_1x_3 \text{ и } x_1x_3 + x_2x_4.$$

При наличии добавочных членов x_1x_3 и x_1x_4 в полном описании, имеющем $C_s^4 = 70$ членов, не «пропадает» ни один. Без такого дополнения полное описание содержит только 54 члена.

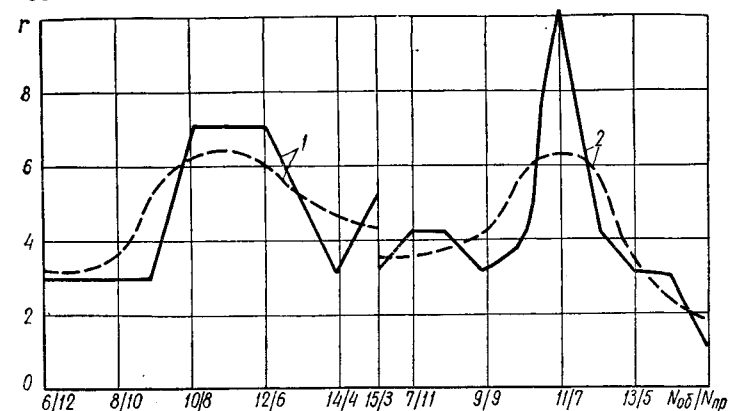


Рис. 10. График зависимости числа рядов селекции от соотношения количества точек в обучающей и проверочной последовательностях:
при малых (1) и больших (2) помехах.

В следующем примере показано, как влияет разделение экспериментальных точек при наличии помех на точность модели.

Пример 4. Получение абсолютных оценок коэффициентов полинома *.

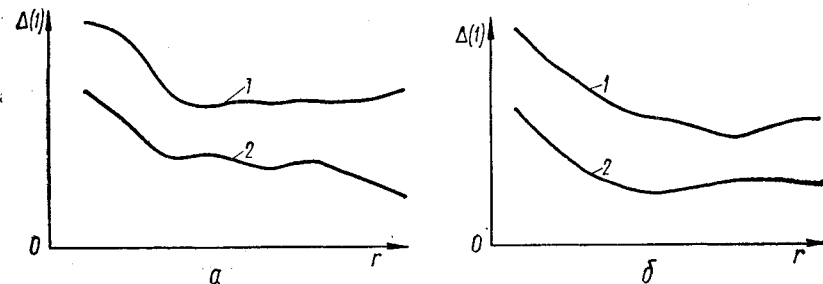


Рис. 11. График зависимости ошибки Δ (1) на проверочной последовательности от числа рядов селекции при больших (а) и малых (б) помехах:

1 — $N_{об}/N_{пр} = 12/6$; 2 — $N_{об}/N_{пр} = 13/5$.

Рассмотрим полином, такой же как и во втором примере:

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5.$$

Будем восстанавливать его по 18 точкам (табл. 4) при различном соотношении $N_{об}/N_{пр}$, где $N_{об}$ — число точек в обучающей, а $N_{пр}$ — число точек в проверочной последовательности.

* Условия, при которых восстановление полинома возможно, подробно рассматриваются в гл. 3. Пример написан совместно с П. И. Ковальчуком и Н. Н. Тодуа.

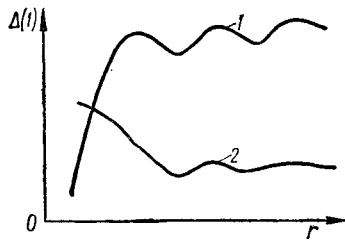


Рис. 12. График зависимости ошибки $\Delta(1)$ на проверочной последовательности от числа рядов селекции при больших (1) и малых (2) помехах: $(N_{об}/N_{пр}) = 15/3$.

а при их уменьшении имеется минимум при $r = 5$. Если $N_{пр} < 3$, устойчивой тенденции не наблюдается вследствие большой размерности M_{β} . При $N > 6$ ошибка также имеет резко колебательный характер (рис. 12.) так как $\vec{\alpha}^*$ не является единственной точкой.

Теорема 7 (о сходимости процесса селекции проекторов). Используем для предварительного отбора не только подпространства $L_j = \{x_i\}$, $i = 1, \dots, s$, но и расширенную систему подпространств $L_j = \{x_i^l\}$, $(0 \leq l \leq m)$ ($i = 1, \dots, s$), включающую степени переменных.

Покажем, что при $r \rightarrow \infty$ для произвольного пути $f_n \rightarrow f^*$, где f^* — проекции φ на подпространство $L = \bigcup L_j$, $[1 \leq j \leq (m+1)s]$.

Пусть предварительный отбор F переменных происходит из условия

$$x_i = \arg \min_{x_i \in X} \{ \min_{\{a\}} \|\Delta_n - ax_i\| \}$$

на множестве подпространств $\{L_j^l\}$.

Тогда для произвольного пути k_r^l ($r = 1, \dots, s$) последовательность $f_r \rightarrow f^*$ при $r \rightarrow \infty$, где f^* — единственный элемент, удовлетворяющий условию

$$f^* = \arg \min \|\varphi - f\|.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$\|\varphi - f_{nk}\| = \Delta_{nk+1} \quad (1 \leq k \leq F).$$

Очевидно, что $\|\varphi - f_{nk}\|$ строго убывает, или, начиная с некоторого номера n , остается постоянной.

Действительно,

$$\|\varphi - f_{nk+1}\|^2 = \|\varphi - f_n\|^2 - \|P_k \Delta_n\|^2.$$

В качестве частных описаний были выбраны полиномы вида

$$y_0 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2.$$

При этом использовались три последние точки с небольшими помехами и точки, где помехи увеличены.

Численные расчеты показали, что помехи уменьшают число рядов селекции, а величину среднеквадратической ошибки $\Delta(1)$ увеличивают (рис. 8, 9).

Увеличение «закономерных» точек приводит к увеличению r (рис. 10, 11), что объясняется уменьшением расстояния от точки $\vec{\alpha}^*$ к множеству M_{β} .

Характерным является график (рис. 11), где при больших помехах ошибка возрастает,

Если для всех P_j ($1 \leq j \leq (m+1)$) $\|P_j \Delta_n\| = 0$, то, начиная с данного узла, все пути обрываются и

$$\varphi - f_n = \varphi - f_{(n+1)k} = \dots = \varphi f_{(n+1)k}.$$

Это возможно лишь тогда, когда f_n удовлетворяет условию f^* .

Если для одного P_k $\|P_k \Delta_n\| > 0$, то $\|\Delta_{nk}\| > \|\Delta_{n+1j}\|$ хотя бы для одного j , а значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\{k\}} \|\varphi - f_{nk}\| = \|\varphi - g^*\| = \delta.$$

Покажем, что $g^* = f^*$ ($\|\varphi - g^*\| = \|\varphi - f^*\|$).

Сначала предположим противоположное. Тогда для любого вектора g^* найдется такой оператор P_k , при котором

$$\|\varphi - g^*\| - \|\varphi - P_k(\varphi - g^*)\| > \varepsilon_k.$$

Покроем сферу

$$\theta = \{g^* : \|\varphi - g^*\| = \delta\}$$

конечной системой замкнутых областей G_{rk} , для которых выполняется последнее условие.

Очевидно также, что для достаточно большого n найдется g^* , при котором

$$\max_k \|\varphi - f_{nk} - (\varphi - g^*)\| \leq \gamma_n,$$

где $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из неравенства сторон треугольника следует

$$\|\varphi - f_{nk} - P_k(\varphi - f_{nk})\| \leq \|\varphi - g^* - P_k(\varphi - g^*)\| + \|P_k(\varphi - g^*) - P_k(\varphi - f_{nk})\|$$

или

$$\|\varphi - f_{nk} - P_k(\varphi - f_{nk})\| \leq \|\varphi - g^* - P_k(\varphi - g^*)\| + \|P_k\| \gamma_n < \|\varphi - g^*\| \quad (\|P\| = 1),$$

если только γ_n достаточно мало.

Следовательно, все элементы f_{nk} , которые были вне шара

$$\Omega_\theta = \{g : \|\varphi - g\| \leq \delta\},$$

на $n+1$ -м шаге оказываются строго внутри Ω_θ , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k \|\varphi - f_{nk}\| < \delta$, что противоречит предыдущему условию. Последнее неравенство доказывает, что

$$\|\varphi - g^*\| = \|\varphi - f^*\|.$$

Единственность f^* легко доказывается из единственности проекции φ на подпространство L .

При выборе программ должно быть уделено большое внимание выбору критерия селекции («второго критерия» или «внешнего дополнения»). Для решения задач однократного прогнозирования и распознавания новых, неожиданных изображений используется критерий регулярности: минимизируется среднеквадратичная ошибка на отдельной, проверочной последовательности. При этом критерии рекомендуется применять: для трендов — седьмой или восьмой способ регуляризации; для остатков (и при отсутствии трендов) — третий способ.*

Для решения задач идентификации, в том числе структурной идентификации или восстановления («открытия») законов, а также для задач дифференциального прогноза и распознавания изображений, имеющих уже в экспериментальных данных, используется критерий несмещенности оценок коэффициента. При этом критерии рекомендуется применять первый или второй способ регуляризации.

Селекция прекращается, отдельно для каждой переменной, как только критерий селекции перестает существенно изменяться. Таким образом, в общем случае уравнения регрессии различной сложности включают все переменные.

«Свобода выбора решений» F принимается возможно большей. Специальным расчетом определяется максимально допустимая величина $F_{\max}$ с учетом заданного времени счета и параметров вычислительной машины.

В некоторых программах предусматривается также определение оптимальной глубины учета предыстории и оптимальной дискретизации данных во времени (по минимуму критерия селекции). Программы разрабатываются в двух вариантах: с протекцией переменным (для идентификации) и без протекции (для остальных задач).

В программах без протекции переменным корреляционный отбор наиболее эффективных сдвигов переменных во времени не используется. На селекцию поступают переменные со всеми возможными временными сдвигами (в пределах интервала учета предыстории).

Сравнение и выбор программ. Возникает вопрос: зачем разработано так много вариантов различных алгоритмов МГУА и будет ли конец увеличению их числа?

Ответ таков: конца не будет, т. е. будут разрабатываться все новые и новые алгоритмы и программы. Принципиально все методы моделирования относятся либо к детерминистическому подходу, который можно выразить словами: «чем сложнее модель, тем она точнее», либо к подходу самоорганизации, основанному на при-

знании существования единственной модели оптимальной сложности, отвечающей минимуму целесообразно выбранного критерия селекции.

При детерминистическом подходе выбор сложности модели происходит по внешним дополнениям, которые не являются целесообразными для задач прогнозирования, идентификации и управления. Если принят принцип самоорганизации, то выбор способа построенного повышения сложности модели с целью поиска указанного минимума является уже не принципиальным. Алгоритмы МГУА представляют собой различные способы поиска минимума критерия селекции, и тот из них лучше, который позволяет найти более глубокий минимум.

Из различных программ МГУА, разработанных в настоящее время, более глубокий минимум критерия регулярности (точности) определяется программой по ортогонализованному обобщенному алгоритму МГУА с селекцией проекторов [71], которая сейчас является лучшей. В качестве частных описаний в такой программе используются не полиномы вида

$$y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2,$$

а дробно-полиномиальные функции

$$y = \frac{a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2}{1 + b_1x_i + b_2x_j + b_3x_ix_j + b_4x_i^2 + b_5x_j^2}.$$

Более общий вид опорной функции расширяет круг задач, где алгоритмы МГУА находят точное решение. Размер матриц частных описаний увеличивается в два раза. Переменные нормируются по формуле $x_i = \frac{x_i - x_{i \min}}{x_{i \max} - x_{i \min}}$, благодаря чему остаются знакопостоянными, что необходимо для решения задач открытия законов (см. гл. 3).

Поиск минимума происходит за два счета. Первый раз все уравнения просчитываются на десять рядов для каждого уравнения и определяется глобальный минимум. При втором счете изменение уравнений останавливается на ряде, отвечающем индивидуальному минимуму каждого уравнения системы.

Этап адаптации коэффициентов. Если найден острый и глубокий минимум критерия селекции (ориентировочно $\Delta(1)_{\text{норм}} \leq 0,05$), то синтез модели оптимальной сложности можно считать успешно завершенным, а результат синтеза — достоверным. Если существенного минимума нет, то это свидетельствует о неблагоприятии в исходных данных или в списке переменных и опорных функций. В этом случае область перебора машины нужно расширить и уточнить исходные данные.

Если минимум найден, но он не достаточно острый и глубокий (это может быть в результате отсутствия в частных описаниях

* Способы регуляризации будут описаны в гл. 2.

определенных комбинаций переменных или при недостаточной свободе выбора F), этап структурного синтеза модели следует дополнить этапом адаптации коэффициентов. На этом этапе коэффициенты уточняются по всем имеющимся точкам исходных данных так, чтобы всемерно улучшить глубину минимума критерия селекции. Затем следует применить случайный поиск или любые методы пошагового изменения (адаптации) коэффициентов модели по критерию несмещенности, до $n_{см} = 0$ или $k = \left(\frac{n_{см}}{n_{см.нач}}\right)^2 + \left(\frac{B}{B_{нач}}\right)^2 = 0$.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ПО ПРИНЦИПУ САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ *

Программы основаны на поиске глобального минимума некоторых критериев селекции, обладающих свойствами «внешнего дополнения», при постепенном усложнении модели. Наличие минимума дает возможность передать машине этап нахождения единственной модели оптимальной сложности и ее исследования, т. е. реализовать принцип самоорганизации. Метод поиска — поочередное опробование моделей (перебор). Программы составлены на языке АЛГОЛ-60 (на одной из двух его версий) для трансляторов машины БЭСМ-6. Часть из них переведена на язык ФОРТРАН для машины «Минск-32». Программы в основном различаются по виду алгоритмов МГУА, по типу решаемой задачи моделирования, по используемому набору критериев селекции, и предназначены для решения следующих задач математического моделирования.

Программы выделения функций времени — трендов [49, 71]. Позволяют найти оптимальную по сложности функцию, содержащуюся в сложном случайном процессе, заданном небольшим числом экспериментальных данных (не менее 10—20).

Программы выделения «остатка» — функции многих других аргументов, кроме времени (а также включающие время как один из аргументов) [15, 17, 48, 62, 70, 71]. Позволяют найти систему конечно-разностных уравнений (линейную или нелинейную) с большим числом запаздывающих аргументов, описывающую данный сложный объект. При этом выясняется структура системы.

Программы для системного многократного дифференциального прогноза процессов в сложных системах и управления с оптимизацией прогноза [17, 47, 65]. Предусматривают многократное интегрирование «дифференциальных уравнений регрессии» для получения долгосрочных прогнозов. Таким образом, для них можно использовать

либо выделение трендов, либо многократное интегрирование указанных уравнений, или выделение тренда и интегрирование остатка вместе. В последнем случае дифференциальные уравнения составляются для «остатков» от трендов.

Программы, специализированные для прямого открытия физических законов по небольшому числу экспериментальных данных [44]. Позволяют найти одно алгебраическое или конечно-разностное уравнение, выражающее закон, представленный рядом экспериментальных точек наблюдения. В них предусмотрен перебор различных опорных функций, чего нет в программах для синтеза систем уравнений. Запаздывание аргументов, как правило, в этих программах не предусматривается.

Программы для открытия уравнений динамики сложных систем и исследование их устойчивости при малых и больших отклонениях. Дают возможность получить описание сложного объекта не только во времени, но и в трехмерном пространстве (например, областей загрязнения водоемов). Далее предусматривается исследование устойчивости при малых и при больших отклонениях от равновесия (по методам Ляпунова).

Программы для синтеза многорядных перцептронов и распознающих систем (см. журнал «Автоматика», 1974, № 2). Позволяют найти оптимальный состав ансамбля признаков и оптимальную структуру (число рядов и число А-элементов) перцептрона и определить знаки его бинарных связей во всех рядах.

Одна из программ позволяет проектировать множество точек, расположенных в гиперпространстве, на плоскость для разделения их на классы.

Программы для синтеза автоматического управления сложным объектом по принципу оптимизации прогноза. Позволяют реализовать оптимизацию управления при «скользящем» интервале прогноза: на каждом шаге цель оптимизации отодвигается на один шаг дальше.

В качестве критерия селекции в указанных программах чаще всего используется *критерий регулярности* в одной из двух его форм: среднеквадратичная ошибка, определяемая на отдельной проверочной последовательности данных (ищется минимум этой ошибки) или коэффициент корреляции действительных значений функции и выходной величины модели (ищется максимум коэффициента). Преимущество критерия регулярности в том, что он плавно изменяется при увеличении сложности модели (см. рис. 1). Это дает возможность отказаться от полного перебора моделей и применить многорядные алгоритмы МГУА, при которых по критерию сравнивается только часть моделей. Например, при квадратичных частных описаниях проверяются только модели второй, четвертой, восьмой, шестнадцатой и т. д. степеней.

* Все программы разработаны под руководством автора и зарегистрированы в Украинском Республиканском Фонде Алгоритмов и Программ (при СКБ Института кибернетики АН УССР, г. Киев), откуда их можно затребовать. Программа идентификации сложного объекта управления опубликована в работе [37].

Недостатком критерия регулярности являются его слабые экстраполирующие свойства: на участке интерполяции (где заданы точки обучающей последовательности) он дает хорошее приближение функции, но на участке экстраполяции (см. рис. 47) кривая регрессии сравнительно быстро уходит вверх (в бесконечность) или вниз (падает до нуля). Поэтому критерий регулярности рекомендуется при малом времени упреждения прогноза или для задачи идентификации.

Значительно лучшие экстраполирующие качества имеет критерий *несмещенности*, при котором в процессе селекции выбирается модель, наименее чувствительная к выбору экспериментальных точек. К преимуществам критерия несмещенности относится также постоянство абсциссы его минимума. Имеется три разновидности критерия несмещенности: для решений уравнений регрессии, их коэффициентов и для ортогонализированных алгоритмов МГУА (в относительной форме). Критерий несмещенности не всегда дает достаточно плавную характеристику (в функции сложности модели) и поэтому его следует применять дополнительно к критерию регулярности: сначала селектируется некоторое количество наиболее регулярных моделей, а затем среди них выбирается наиболее несмещенная модель. Процесс селекции при этом приобретает иерархическую двухэтапную структуру.

Однако самые лучшие экстраполирующие свойства имеет критерий *баланса переменных*. Этот критерий решает задачу долгосрочного и сверхдолгосрочного прогнозирования, хотя его можно применить и для идентификации. Критерий не дает плавной характеристики в функции сложности модели, и потому он применяется либо при полном переборе моделей (по комбинаторному алгоритму МГУА), либо в сочетании с критериями регулярности и несмещенности, как основной критерий. Сначала селектируется ряд моделей наиболее регулярных или несмещенных, а затем из них выбирается одна, наиболее удовлетворяющая критерию баланса переменных. Процесс селекции при этом получается двух- или даже трехэтапным.

Первый этап — выбор некоторого количества наиболее регулярных моделей, второй — выбор из них нескольких наиболее несмещенных моделей и, наконец, выбор одной модели, дающей наилучший баланс. Модели могут быть представлены в виде трендов или в виде дифференциальных уравнений или в виде трендов и дифференциальных уравнений «остатка».

В программах должен быть предусмотрен «этап адаптации коэффициентов». Это означает, что оценки коэффициентов должны быть пересчитаны в конце программы (когда уже определена структура модели) по всем экспериментальным точкам. При помощи случайного поиска коэффициенты уточняются с тем, чтобы получить нулевое значение критерия несмещенности ($n_{см} = 0$).

Так как разработка программ отстает от разработки теории самоорганизации моделей, большинство программ основано на использовании только одного критерия селекции (регулярности или несмещенности), и этап адаптации коэффициентов в них не всегда предусмотрен. Эти улучшения будут введены в последующих программах, которые находятся в стадии разработки.

Глава II

ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОДНОКРАТНЫЙ СРЕДНЕСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ

Для селекции модели оптимальной сложности, как указывалось, используются различные эвристические критерии, обладающие свойствами внешнего дополнения (рис. 1). Примеры показывают, что при нахождении минимума и постепенном усложнении модели критерий регулярности Δ (1) (в любой из двух форм) дает наиболее плавные характеристики. Плавность характеристик позволяет применить многоэтапные алгоритмы селекции вместо полного перебора всех возможных моделей, т. е. сократить объем решения задачи синтеза модели на ЭВМ. Это свойство критерия регулярности позволяет рекомендовать его в качестве единственного критерия селекции или как вспомогательный критерий для предварительного выбора некоторого количества самых регулярных моделей, которые затем подвергаются второй селекции по другому (основному) критерию. В качестве основного применяется критерий несмещенности $n_{см} \rightarrow \min$ или критерий баланса переменных $B \rightarrow \min$. Определение критерия регулярности требует разделения множества имеющихся экспериментальных точек на обучающую и проверочную последовательности. Способы регуляризации определяются тем, какие именно точки использованы в этих двух последовательностях, и сравниваются между собой еще по одному внешнему дополнению — по среднеквадратичной ошибке Δ (2) на третьей, экзаменационной последовательности.

При этом оказывается, что для одних задач следует применять определенный способ разделения точек, а для других — иной. Так, например, для решения задачи идентификации сложных объектов и задачи краткосрочного прогнозирования требуется один способ регуляризации, а для решения задачи долгосрочного прогнозирования — другой способ. Иными словами — регуляризация должна быть целенаправленной.

Расчет конкретного примера (прогнозирование степени загрузки производства Англии) показал, что при помощи выбора определенных приемов целенаправленной регуляризации точность

среднесрочного прогноза (на 3—5 лет вперед) может быть повышена до точности краткосрочного прогноза (только на один год вперед). Дополнительное применение селекции по критерию несмещенности и баланса переменных позволяет получить весьма точные долгосрочные и сверхдолгосрочные прогнозы. Для кратко- и среднесрочных прогнозов применение критерия баланса переменных не рекомендуется. В данной главе ограничимся сравнением нескольких способов регуляризации при решении задачи среднесрочного, однократного прогнозирования.

Специальные целесообразные приемы регуляризации выявляются на реальных примерах прогнозирования стока р. Днепр и изменения одного из показателей экономической модели Англии. Таким образом, вопрос о том, какой способ регуляризации следует выбрать для той или иной задачи, решается на конкретных и весьма различных по своей природе примерах по критерию Δ (2). Для прогнозирования используется селекция (по критерию Δ (1)) тренда — простого алгебраического уравнения регрессии, связывающего интересующую нас величину со временем.

Критерии несмещенности и критерий баланса переменных (рекомендуемые для решения задач идентификации и долгосрочного прогнозирования) менее чувствительны к способу разделения экспериментальных точек, чем критерий регулярности. Однако поскольку они, как правило, применяются не самостоятельно, а лишь дополнительно к критерию регулярности, вопрос о выборе способа регуляризации остается актуальным при использовании указанных критериев.

Синтез прогнозирующей модели при помощи селекции на ЭВМ не всегда оказывается успешным. Мерой успеха может служить глубина минимума основного критерия селекции. До адаптации коэффициентов в точке минимума критерий должен быть, ориентировочно, менее 5 % (при нормированных переменных). Если глубокий минимум не достигнут, прогноз не достоверен. Это может быть в том случае, когда в исходных данных нет информативных переменных, либо слишком много помех, либо, наконец, мала область перебора ЭВМ (нет перебора опорных функций, мала степень свободы выбора по рядам селекции F и т. п.). Таким образом, ЭВМ обеспечивает не только выдачу оптимального прогноза, но и определяет показатель его достоверности — оценку глубины минимума.

ЧЕЛОВЕЧЕСКОЕ ПРЕДВИДЕНИЕ И МАШИННОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ БУДУЩЕГО

Только человек, или группа экспертов, и вычислительная машина (при пассивном участии человека) могут прогнозировать будущее на основе переработки информации о настоящем и прошлом.

Сравнивая возможности человека и машины, надо признать, что только в случае, если действительно существуют такие загадочные явления как телепатия и ясновидение, прогнозы человека принципиально лучше, чем прогнозы машины. Дальнейшее изложение исходит из предположения, что ясновидения нет, и тогда возникает вопрос: почему же статистические прогнозы машины, особенно при значительном времени упреждения прогноза, в наше время часто оказываются гораздо менее точными, чем прогнозы группы экспертов? Однако есть уверенность, что такое положение является временным и объясняется только недостаточной разработкой принципов, методов и алгоритмов статистического прогноза. Принципиально возможности машин значительно выше, чем у человека, хотя бы из-за наличия большой по объему точной памяти и применения уравнений прогнозирования оптимальной сложности. В машине может быть реализована как «точная», так и «смутная» память, а также прогнозирование по аналогии ситуаций.

По-видимому, в самое ближайшее время область применения «метода экспертных оценок» значительно сократится за счет увеличения области применения машинных методов прогнозирования. Это произойдет из-за раскрытия новых возможностей, которые несет с собой в прогнозировании принцип самоорганизации, реализуемый рядом алгоритмов МГУА. Только подход самоорганизации позволяет получить сложные нелинейные уравнения прогнозирования с запаздывающими аргументами при оптимизации их сложности. Такие уравнения еще никем не применялись, и поэтому выяснение их возможностей в смысле точности прогноза представляет несомненный интерес.

Методы самоорганизации моделей позволяют получить точные прогнозы по нескольким точкам предыстории при условии целесообразного выбора способа регуляризации и последовательности критериев селекции. С каждой новой экспериментальной точкой модель адаптируется, и прогноз уточняется. В связи с этим возникает вопрос, какой смысл получают модели и прогнозы, если не исключено, что в следующий момент произойдет значительное изменение структуры и параметров сложного объекта?

На такие предостережения можно ответить также вопросом: какой смысл получать уравнение, например маятника или системы управления, если не исключено, что завтра ее сломают или заменят другой? Модели и прогнозы относятся к состоянию объекта за несколько последних интервалов времени, выбранных произвольно, и не ответственны на случай неожиданного внешнего вмешательства в объект.

Прогноз называется *однократным*, если для него используются только точки (узлы интерполяции), наблюдавшиеся на объекте.

Прогноз называется *многократным*, если, кроме того, в качестве исходных данных используются результаты предыдущих прогнозов с меньшим временем упреждения.

Наиболее распространено дискретное определение терминов «сглаживание», «краткосрочный», «среднесрочный» и «долгосрочный» прогнозы. Под сглаживанием понимается косвенное измерение переменных при времени упреждения, равном нулю ($T_y = 0$).

В работе [4] принято считать: краткосрочные прогнозы $T_y = 1 \dots 2$ года; среднесрочные $T_y = 3 \dots 7$ лет; долгосрочные $T_y = 10$ лет и более.

Недостаток дискретного определения терминов в том, что оно подходит только для прогнозирования гидрологических, экономических и некоторых других случайных процессов, где шаг дискретизации по оси времени равен одному году.

Для стационарных случайных процессов, имеющих монотонно убывающую автокорреляционную функцию, больше подходит корреляционное определение. *Временем когерентности* T_k обычно называют величину отрезка времени сдвига, на котором автокорреляционная функция существенно отличается от нуля. Вне этого отрезка она почти равна нулю.

Прогнозы, упреждение которых составляет 10—20% от времени когерентности ($0 < T_y < 0,2 T_k$), можно назвать *краткосрочными*. *Среднесрочные* прогнозы относятся к области $0,2 T_k \leq T_y < T_k$. Прогнозы при времени упреждения, большем времени когерентности ($T_k < T_y$), следует назвать *долгосрочными*. Для процесса изменения загрузки производства Англии время когерентности $T_k = 15$ лет (см. рис. 18), следовательно, долгосрочный прогноз имеет место при времени упреждения 15 лет и более.

Автокорреляционная функция однозначно связана со спектром случайного процесса (через преобразование Фурье). Поэтому можно дать еще третье, спектральное определение терминов: краткосрочный прогноз — прогноз, который учитывает высокие гармоники, долгосрочный прогноз — учитывает только гармонические составляющие очень низких и сверхнизких частот. Уравнения краткосрочного и долгосрочного прогнозов, как правило, имеют различные аргументы [76].

Из предыдущего следует, что чем шире автокорреляционная функция (и чем уже ее спектр), тем большим можно взять время упреждения прогноза. Процессы типа «белого шума» принципиально не поддаются предсказанию, а детерминированные процессы, например синусоида, могут быть точно рассчитаны на любое время вперед.

Время когерентности T_k показывает предельное значение возможного времени при однократном прогнозе некоторой случайной величины, выполняемом только по предыдущим ее значениям. Например, если формула предсказания имеет вид

$$\Phi_0 = f(\Phi_{-1}, \Phi_{-2}, \Phi_{-3}, \dots, \Phi_{-T_L}),$$

где $\Phi_0, \Phi_{-1}, \Phi_{-2}$ — значения переменной в будущий, текущий и предыдущий моменты времени соответственно, то однократный прогноз возможен только при времени упреждения $T_y \leq T_k$.

Многократный прогноз позволяет удлинить время упреждения во много раз, при этом общее время упреждения можно разделить на ряд равных отрезков:

$$T_y = T_{y_1} + T_{y_2} + \dots + T_{y_m},$$

где каждое слагаемое — меньше времени когерентности. Первый прогноз выполняется с временем упреждения T_{y_1} , и полученные результаты записываются в таблицу исходных данных для следующего прогноза. После этого рассчитывается второй прогноз со временем упреждения T_{y_2} и так далее по шагам; находится прогноз на полное время упреждения T_y , которое принципиально может во много раз превосходить время когерентности однократного прогноза.

Другая ситуация складывается, если в формуле прогнозирования участвуют не только значения данной переменной, но и вспомогательных, коррелированных переменных, например

$$\Phi_0 = f(\Phi_{-1}\Phi_{-2} \dots \Phi_{-T_L});$$

$$v_{1,-1}v_{1,-2} \dots v_{1,-T_L};$$

$$v_{2,-1}v_{2,-2} \dots v_{2,-T_L}.$$

В этом случае предельно допустимое время упреждения однократного прогноза равно большему времени когерентности, выбранному по автокорреляционной и всем взаимокорреляционным функциям. Например, если время когерентности для одной из взаимокорреляционных функций больше всех других, и равно 20 годам, то время упреждения однократного прогноза не может превосходить этого срока. Многократное повторение прогноза может и в этом случае удлинить время упреждения во много раз.

КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ВЫБОР ОБЛАСТИ ИХ СРАВНЕНИЯ ПО ТОЧНОСТИ

В данной главе мы ограничимся сравнением различных алгоритмов МГУА при однократном прогнозе одной переменной, в задачах среднесрочного прогноза, на уровне алгебраических уравнений, при полиномиальных и гармонических элементарных функциях, используемых для образования алгоритмов класса сумм, для ряда способов целенаправленной регуляризации.

Как указывалось, по характеру исходных данных алгоритмы прогнозирования могут быть однократными и многократными. Покажем различие уравнений однократного и многократного прогнозирования.

Время упреждения прогноза $T_y = Ra$, где R — число повторений операции вычисления прогноза; a — число интервалов предистории процесса, которые запрещается использовать в уравнении прогнозирования (минимальное запаздывание отсчета аргументов).

Однократному прогнозированию ($R = 1$, $a = T_y$) соответствует уравнение

$$\varphi_0 = f(\varphi_{-a}, \varphi_{-(a+1)}, \varphi_{-(a+2)}, \dots, v_{-a}, v_{-(a+1)}, v_{-(a+2)}, \dots).$$

Многократному прогнозированию ($R = T_y$, $a = 1$) соответствует уравнение

$$\varphi_0 = f(\varphi_{-1}, \varphi_{-2}, \varphi_{-3}, \dots, v_{-1}, v_{-2}, v_{-3}, \dots).$$

Так как корреляционные функции имеют обычно убывающий характер, то ясно, что чем больше a , тем больше теряется наиболее эффективных аргументов в уравнении прогнозирования. При увеличении времени упреждения точность однократного прогноза быстро падает из-за ухудшения качества аргументов. Только один аргумент прогноза—время—известен наперед и может быть взят без всякого запаздывания*.

При многократном прогнозе каждый раз используются самые эффективные аргументы, отвечающие максимумам корреляционных функций. В качестве примера на рис. 13 показаны корреляционные функции, используемые ниже для прогнозирования среднегодового стока р. Днепр. По максимумам функций легко определить запаздывания, с которыми следует выбрать аргументы прогнозирующей модели. Выбор аргументов будет выполнен в соответствующем примере

* Сказанное здесь относится в полной мере только к пассивному прогнозу. При нормативном прогнозе в множество аргументов входят также (с целью управления) регулирующие воздействия. Они, как и время, известны для каждого момента будущего. Время и регулирующие воздействия отсчитывают с любым запаздыванием T_L , в том числе и при $T_L = 0$ (без запаздывания), а также с упреждением.

ниже. Если используемые максимумы близки к единице, то время упреждения T_y многократного прогноза неограничено. Точность прогноза с увеличением времени упреждения теоретически не изменяется. Прогноз нужно вести по интервалам, одновременно для

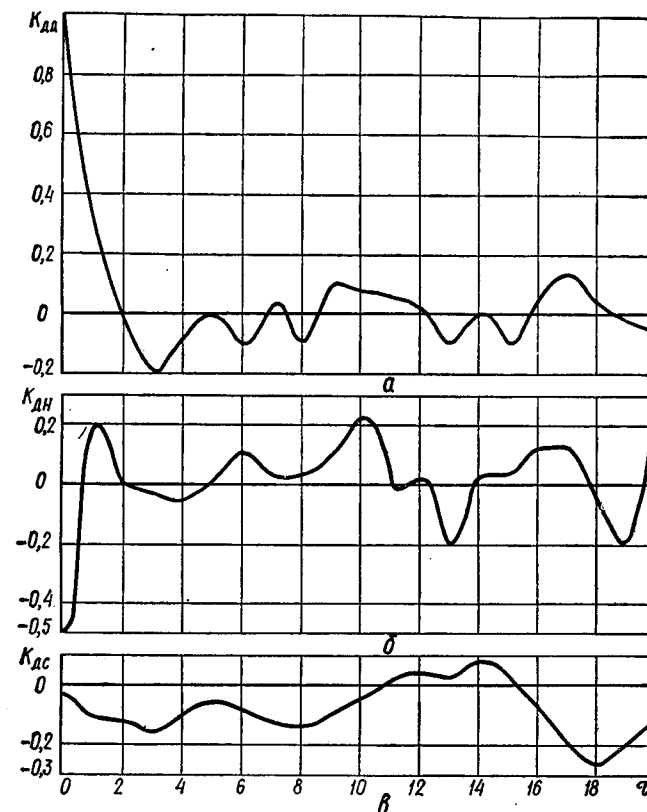


Рис. 13. График корреляционных функций: а — автокорреляционная функция Днепра ($K_{дд}$); б — взаимокорреляция Днепр — Неман ($K_{дн}$); в — взаимокорреляция Днепр — Солнце ($K_{дс}$).

всех переменных, входящих в уравнение прогнозирования (т. е. для всех составляющих характеристического вектора замкнутой системы).

Существует еще одно различие возможностей однократного и многократного прогнозов. Однократный прогноз всегда приходится вести на уровне алгебраических уравнений, связывающих ординаты наблюдаемых переменных, так как в общем виде нелинейные

дифференциальные уравнения с запаздывающими аргументами не решаются.

В отличие от этого многократный прогноз можно вести как на уровне алгебраических, так и на уровне дифференциальных (или разностных) уравнений. При вычислении прогнозируемой кривой интервал за интервалом дифференциальные уравнения так же удобны, как и алгебраические. Прогнозирование по дифференциальным уравнениям обладает меньшим сглаживанием (по той же причине, по которой производная опережает саму функцию), что еще больше повышает преимущества многократного прогноза.

Запишем уравнение прогнозирования в более общем, чем это было до сих пор, виде:

$$Z(p) \varphi_0 = f(\varphi_{-1} \varphi_{-2} \varphi_{-3} \dots v_{-1} v_{-2} v_{-3} \dots).$$

При алгебраическом уравнении регрессии $Z(p) = 1$ при дифференциальном (многократном) прогнозировании $Z(p) = p$, где $p = \frac{d}{dt}$. По-видимому, существует оптимальный вид оператора $Z(p)$, который дает наименьшее сглаживание острых пиков прогнозируемой кривой. Существует гипотеза, что оптимальным является оператор, отвечающий изображению временной функции прогнозируемого процесса.

В качестве элементарных опорных функций обычно используются степенные полиномы Колмогорова — Габора и гармонические ряды с некратными периодами. Именно эти два вида функций зарекомендовали себя как наиболее удобные для построения алгоритмов, входящих в класс сумм либо — в класс произведений.

Класс сумм некоторых элементарных функций можно представить следующими комбинациями (например, для числа аргументов $m = 4$):

$$\varphi_{+1} = f(x_1 x_2 x_3 x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(x_1 x_2 x_3) + f(x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(x_1 x_2) + f(x_3 x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(x_1) + f(x_2 x_3 x_4) \text{ и т. д.}$$

Всего $\frac{1}{2} (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4) = 12$ комбинаций (см. стр. 36).

Класс произведений можно представить таким же количеством комбинаций, однако все знаки суммирования при этом заменяются знаками умножения (или деления).

Класс сумм имеет преимущество в случае, когда случайный характер процесса связан с аддитивными помехами, а класс произведений — при наличии мультипликативных помех.

В вычислительных программах МГУА, описанных в первой главе, используется как класс сумм, так и класс произведений элементарных опорных функций.

Разработаны также так называемые обобщенные алгоритмы МГУА, в которых используются одновременно суммы и произведения. Эти алгоритмы дают наиболее глубокий минимум критериев селекции.

Во многих работах по прогнозированию и интерполяции вопрос о наилучшем выборе элементарной опорной функции ставится, например, так: что лучше использовать в данной задаче, степенные полиномы или гармонический ряд? Такую постановку следует признать неточной. Известно, что наилучшая аппроксимация достигается не одной, а целым рядом независимых функций. Следовательно, правильнее поставить вопрос так: какой вид опорной функции нужно применить в первую очередь, а какой — для аппроксимации остатка, т. е. важна очередность применения этих функций.

При большом опыте моделирования для решения данного вопроса достаточно только взглянуть на графики процесса: пологие графики лучше начинать аппроксимировать степенными полиномами, а волнистые — гармоническим рядом. В спорных случаях вопрос очередности решает машина по критерию регуляризации: та очередность лучше, при которой получается меньшая ошибка на проверочной последовательности.

Несмотря на указанные принципиальные недостатки однократного прогноза (старение аргументов и невозможность использования дифференциальных уравнений регрессии), попробуем его оптимизировать, в первую очередь при помощи выбора способа целенаправленной регуляризации. Улучшение точности однократных прогнозов позволит увеличить шаг, с которым они повторяются в алгоритмах многократного прогноза.

СПОСОБЫ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Способов регуляризации может быть очень много. Рассмотрим лучшие из них.

Первый способ состоит в том, что узлы интерполяции делятся на обучающую и проверочную последовательности через один так, чтобы последняя точка данных попала в проверочную последовательность.

Целенаправленная регуляризация для краткосрочного прогноза состоит в том, что при прогнозировании на нечетный год в обучающую последовательность включаются данные за все четные годы, а в проверочную — данные за все нечетные. При прогнозировании на четный год, наоборот, обучающую последовательность образуют нечетные, а проверочную — четные годы.

Второй способ — такой же, как и первый, но последняя точка попадает в обучающую последовательность.

При третьем способе [37] узлы ранжируются по дисперсии и делятся на обучающую и проверочную части так, чтобы получить минимум числа рядов селекции.

Особенности третьего способа регуляризации.

Матрица уравнений получается обусловленной в большей степени, чем при других способах регуляризации. Объясняется это тем, что в обучающую последовательность отбираются точки, наиболее удаленные от среднего значения.

Ранжировка точек в ряд по дисперсии позволяет построить график зависимости числа рядов селекции от разделения точек. Экспериментально установлено, что при третьем способе регуляризации кривая числа селекции в функции отношения чисел точек обучающей и проверочной последовательностей имеет минимум. Таким образом, можно найти такое отношение, при котором получается самая простая модель (минимум числа рядов селекции) (см. рис. 6).

При четвертом способе цифра последнего года входит в проверочную последовательность. Кроме того, сюда же входят данные за все годы, отстающие от последнего на число лет, кратное времени упреждения T_y .

Например, последний год в таблице 1970, прогноз дается на 1977 г. ($T_y = 7$ лет). При этом в проверочную последовательность войдут данные за 1970, 1963, 1956, 1949, 1942, 1936, 1929 гг. и т. д. Остальные данные войдут в обучающую последовательность.

Последний год в таблице 1964, прогноз дается на 1969 г. В проверочную последовательность войдут данные за 1964, 1959, 1954, 1949, 1944, 1939, 1934 гг. и т. д. Остальные данные войдут в обучающую последовательность.

Пятый способ целенаправленной регуляризации отличается использованием только одного узла интерполяции в проверочной последовательности.

Допустим, имеется последовательность данных (узлов интерполяции) за n лет, а прогноз требуется дать с временем упреждения T_y лет. Первый год последовательности N_1 , последний N_n , предсказуемый год $N_n + T_y$.

Этот способ регуляризации состоит в том, что первый прогноз выполняется по алгоритмам выделения трендов оптимальной сложности при следующем разделении узлов: проверочная последовательность — год N_n (одна точка); обучающая — годы от N_1 до $N_n - T_y - 1$.

Например, имеются данные за 160 лет, с 1812 по 1972 гг. $T_y = 7$ лет. Прогноз дается на 1977 г. Тогда в проверочную последовательность войдут данные с 1965 по 1972 гг., а в обучающую — с 1812 по 1964 гг.

Второй прогноз дается по тем же алгоритмам, но при другом разделении данных: проверочная последовательность — год $N_n - 1$; обучающая — годы от N_1 до $N_n - T_y - 2$.

Третий прогноз выполняется при таком разделении: проверочная последовательность — год $N_n - 2$; обучающая последовательность — годы от N_1 до $N_n - T_y - 3$ и т. д.

Прогнозы повторяются 10—20 раз. Затем находится средний (или среднеквадратичный) полином прогноза. Все полученные полиномы суммируются с весом $\frac{1}{k}$, где k — число полиномов. Каждый прогноз дается на определенное время упреждения, и ряд уравнений прогнозирования усредняется. Вместо полиномов можно усреднять прогнозы, полученные по ним.

Шестой способ целенаправленной регуляризации состоит в разделении узлов интерполяции на две последовательности: последние по времени узлы образуют обучающую последовательность, проверочную последовательность целесообразно сдвинуть назад на L лет. Величина оптимального сдвига рассчитывается для каждой конкретной задачи. Выбор оптимального значения сдвига L зависит как от времени упреждения прогноза, так и от числа лет, для которых он рассчитывается (от длины второй проверочной последовательности). В данной работе этот способ не сравнивался с другими из-за его большой трудоемкости.

Четвертый, пятый и шестой способы направлены на то, чтобы в результате селекции получить тренд, склонный проходить через каждую ($T_y - 1$)-ю точку временной случайной последовательности. Основания для этого такие же, как и у селекционера, выбирающего самый черный тюльпан.

Для седьмого способа регуляризации выделяется основная (наибольшая по амплитуде) гармоника процесса. Это часто можно сделать «на глаз», так как большая точность не нужна, или методами гармонического анализа. В проверочную последовательность выбираются точки, отвечающие вершинам основной гармоники. Остальные точки поступают в обучающую последовательность.

При четвертом и седьмом способах регуляризации применяется периодический отбор точек в проверочную последовательность. Отличие состоит в том, что при седьмом способе уточняется начальная фаза отбора. Таким образом, седьмой способ является улучшением четвертого.

Точки, отвечающие вершинам основной гармоники, обычно являются точками с большим значением дисперсии. Поэтому можно сказать, что седьмой способ регуляризации противоположен третьему, при котором точки с большей дисперсией отбираются в обучающую последовательность. Напомним, что с уменьшением дисперсии точек обучающей последовательности обусловленность матриц нормальных уравнений ухудшается. Если обусловленность матрицы мала, то следует отобрать в проверочную последовательность только точки, отвечающие каждой третьей вершине основной гармоники, и т. п.

Первые три способа применимы при выводе уравнений остатков. Особенно рекомендуется третий способ, так как он дает минимальное по сложности выражение.

Остальные способы регуляризации применимы только при выделении «трендов», особенно рекомендуются седьмой и восьмой способы.

Описанные способы регуляризации не исчерпывают всех предложений в этой области, но сравнение их по точности прогноза представляет интерес.

При **восьмом способе** регуляризации вместо применяемого ранее критерия Δ (1) и (в качестве критерия селекции) можно использовать критерий Δ^2 (2) — среднеквадратичную ошибку прогноза отклонений на всех заданных точках, кроме первых T_y точек. Принимается, что наиболее точное алгебраическое уравнение регрессии дает и наиболее точное дифференциальное уравнение регрессии. При этом необходимость разделения имеющихся данных на обучающую и проверочную последовательности отпадает.

Этот способ повышает точность прогноза, причем единственность выбора модели сохраняется. Он рекомендуется в условиях острого недостатка числа экспериментальных точек и при достаточно больших интегралах дискретизации времени (когда влияние помех на отклонение переменных сказывается мало).

Для каждого критерия селекции (внешнего дополнения) получается одна модель, но «единственной» называется модель, отвечающая целесообразно выбранному эвристическому внешнему дополнению.

Критерии Δ (1) $\rightarrow \min$, Δ^2 (2) $\rightarrow \min$ (также, как и некоторые другие, например, критерий несмещенности уравнений регрессии, поясняемый ниже) лучше других отвечают задаче кратко- и среднесрочного прогнозирования, так как направлены на то, чтобы модель «справилась» с приходом новых данных, которых пока еще нет в таблице исходных данных.

Объяснение основной идеи восьмого способа регуляризации. При этом способе регуляризации, применяемом в алгоритмах МГУА, в качестве внешнего дополнения или «второго эвристического критерия» используется информация о приращениях ординат процесса от точки к точке. При этом безразлично, будут ли использованы «передние» и «задние» или «средние» разности, — нужно только условиться об этом.

Способ заключается в следующем. В таблице исходных данных имеется информация о координатах процесса, измеренных в ряде точек наблюдения. Не представляет труда вычислить, например, передние разности для всех точек, кроме первой. Тогда информацию о координатах можно использовать для вычисления оценок коэффициентов уравнений регрессии, а информацию о разностях — в

качестве критерия селекции наиболее регулярных (точных) уравнений.

Подобная информация (как о величине координат, так и о величине производных) уже используется при определении оценок коэффициентов уравнений регрессии в форме полиномов Эрмита. Это дает возможность уменьшить число точек наблюдения в два раза.

Например, для регрессионного анализа можно использовать два полинома:

алгебраическое уравнение регрессии

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2,$$

и дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_2 \frac{dx_2}{dt} + a_3 \left(x_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 \frac{dx_1}{dt} \right),$$

где значения переменных и их первых произвольных заданы. При этом число необходимых точек наблюдения уменьшается в два раза. Здесь рассматриваются разностные уравнения, где производные заменяются разностями.

Другое, более подробное объяснение идеи восьмого способа регуляризации, можно представить так. До сих пор, в алгоритмах МГУА некоторый «полный» полином от многих переменных заменяется рядом «частных» полиномов от двух переменных. Все множество частных полиномов подвергалось экзамену на точность по величине критерия Δ (1) — ошибки на отдельной проверочной последовательности данных. При этом из ряда в ряд селекции пропускались только F самых точных (регулярных) частных полиномов.

Теперь схема селекции частных полиномов остается без изменения, но используется более сложная процедура оценки их точности. Каждое частное уравнение регрессии (называемое «алгебраическим») дифференцируется. В результате получается ряд частных «дифференциальных уравнений регрессии». Точность этих уравнений оценивается по критерию Δ^2 (2) $\rightarrow \min$. Далее селектируется F самых точных дифференциальных уравнений. Вместе с ними отбираются и соответствующие им алгебраические уравнения регрессии. В остальном алгоритмы МГУА остаются без изменения.

Все точки участвуют как в оценке коэффициентов, так и в замене на регулярность, причем достоверность оценок возрастает примерно в $\sqrt{2}$ раз.

Определение критерия Δ^2 (2) $\rightarrow \min$. Для вычисления средней квадратичной ошибки прогноза должны быть заданы: $x^*(t)$ — реализация случайного процесса, одну из ординат которого нужно предсказать; T_y — время упреждения прогноза; $x(t)$ — выходная величина прогнозирующего фильтра.

Зная эти функции, легко получить разность:

$$\Delta x \approx x^*(t) - x(t).$$

Должен быть известен также $\Delta x(t)$ — прогноз разности (выходная величина прогнозирующего фильтра разности). Ниже будем получать $\Delta x(t)$ при помощи дифференцирования $x(t)$. Замена знака d на Δ , как известно, не нарушает действительности уравнения. Структура прогнозирующего фильтра должна быть также задана (для определения интервала времени, на котором он работает): $T_\phi = T_y + T_n$, где T_ϕ — время фильтра, T_y — время упреждения, T_n — время предыстории. Зная $\Delta x(t)$, можно найти вторую разность:

$$\Delta^2(x)(t) = \Delta \Delta x(t) = \Delta x^*(t) - \Delta x(t).$$

Рассмотрим подробнее правила расчета критерия $\Delta(1)$ (среднеквадратической ошибки на проверочной последовательности) и критерия $\Delta^2(2)$ (среднеквадратической ошибки приращений на всех экспериментальных точках).

Правила расчета критерия $\Delta(1) \rightarrow \min$:

1. Пользуясь заданным уравнением регрессии (например, вида $x_0 = f(x_{-1}, x_{-2})$) при $T_y = 1$ и $T_n = 2$, строим кривую $x(t)$.
2. Находим ошибки $[x^*(t) - x(t)]$ для всех точек проверочной последовательности (числом $N_{пр}$);
3. Рассчитываем величину ошибки (абсолютное и относительное значение):

$$\delta(1) = \frac{1}{N_{пр}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{пр}} [x_i^*(t) - x_i(t)]^2}; \quad \Delta(1) = \frac{\delta(1) \cdot 100\%}{\frac{1}{N_{пр}} \sqrt{\sum_{j=1}^{N_{пр}} [x_j^*(t)]^2}}.$$

Правила расчета критерия $\Delta^2(2) \rightarrow \min$:

1. При помощи дифференцирования, или при помощи прямого обучения по алгоритму МГУА, находим уравнение регрессии для ошибки (например, вида $\Delta x_0 = f(\Delta x_{-1}, \Delta x_{-2}, x_{-1}, x_{-2})$) при $T_y = 1$ и $T_n = 2$.

Пользуясь этим уравнением, строим кривую $\Delta x(t)$ для каждого частного уравнения регрессии.

2. Находим разности $[\Delta x^*(t) - \Delta x(t)]$ для всех экспериментальных точек (кроме T_y первых по времени точек).

3. Рассчитываем величину ошибок:
абсолютная

$$\delta^2(2) = \frac{1}{N - T_y} \sqrt{\sum_{j=1}^{\delta=N-T_y} [\Delta x_j^*(t) - \Delta x_j(t)]^2};$$

относительная

$$\Delta^2(2) = \frac{\delta^2(2)}{\frac{1}{N - T_y} \sum_{j=1}^{i=N-1} [\Delta x_j^*(t)]^2} \cdot 100\%.$$

Из сравнения правил расчета видно, что критерии $\Delta(1)$ и $\Delta^2(2)$ отличаются по трем особенностям:

- 1) при подсчете $\Delta^2(2)$ требуется знать время работы фильтра $T_\phi = T_y + T_n$, а для расчета ошибок $\Delta(1)$ эта величина не нужна;
- 2) ошибка $\Delta(1)$ подсчитывается на отдельной проверочной последовательности, а критерий $\Delta^2(2)$ — на всех точках, кроме первых T_y точек;

- 3) ошибка $\Delta(1)$ — первая разность ординат $x^*(t)$ и $x(t)$, а ошибка $\Delta^2(2)$ — вторая разность этих ординат.

Допустим, $T_y = 2$ интервалам, $T_n = 2$, $T_\phi = 4$, а уравнение прогнозирующего фильтра имеет вид

$$\Delta x_0 = f(\Delta x_{-2}, \Delta x_{-3}, \Delta x_{-4}, x_{-2}, x_{-3}, x_{-4}).$$

Допустим также, что реализация ошибки случайного процесса содержит всего 11 точек. Один прогноз занимает четыре интервала времени. Сдвигая интервал прогнозирования по шагу назад шесть раз, можем получить семь прогнозов:

$$\Delta x_0 = f(\Delta x_{-2}, \Delta x_{-3}, \Delta x_{-4}, x_{-2}, x_{-3}, x_{-4});$$

$$\Delta x_1 = f(\Delta x_{-3}, \Delta x_{-4}, \Delta x_{-5}, x_{-3}, x_{-4}, x_{-5});$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta x_6 = f(\Delta x_{-8}, \Delta x_{-9}, \Delta x_{-10}, x_{-8}, x_{-9}, x_{-10}).$$

Всего для заданной короткой реализации получим семь прогнозов, и, следовательно, семь ошибок прогнозирования переменной $\Delta x(t)$:

$$\Delta^2 x_0, \Delta^2 x_{-1}, \Delta^2 x_{-2}, \dots, \Delta^2 x_{-6}.$$

Среднеквадратичная ошибка прогнозирования

$$\Delta^2(2) = \frac{1}{7} \sqrt{\Delta^2 x_0^2 + \Delta^2 x_{-1}^2 + \dots + \Delta^2 x_{-6}^2}.$$

Ниже на примере показано, что использование критерия $\Delta^2(2)$ вместо $\Delta(1)$ не нарушает единственности выбора модели, но при этом повышает точность прогноза. Требования к числу точек эксперимента уменьшаются, а необходимость разделения их на обучающую и проверочную последовательности отпадает.

Пример 5. Восьмой способ регуляризации для ряда уравнений регрессии *. Допустим, задана последовательность значений переменной $x(t)$: $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-7}$. Легко определить «передние» разности, которые также образуют

* Пример написан совместно с аспирантом Ю. В. Чукиным.

временную последовательность:

$$\Delta x_0 = (x_0 - x_1), \Delta x_{-1} = (x_{-1} - x_{-2}), \dots, \Delta x_{(-\tau+1)} = (x_{(-\tau+1)} - x_{-\tau}).$$

Число разностей на единицу меньше числа значений переменной. Далее, допустим, что алгебраическое уравнение регрессии имеет вид

$$x_0 = f_1(x_{-1}, x_{-2}) \text{ при } T_y = 1, T_n = 2,$$

а дифференциальное соответственно

$$\Delta x_0 + f_2(x_{-1}, x_{-2}, \Delta x_{-1}, \Delta x_{-2}).$$

Будем постепенно повышать сложность частных и полного уравнений регрессии и проследим при этом характер изменения среднеквадратичной ошибки $\Delta^2(2)$ в функции этой сложности.

Линейные уравнения регрессии:

$$x_0 = a_0 + a_1 x_{-1} + a_2 x_{-2};$$

$$\Delta x_0 = a_1 \Delta x_{-1} + a_2 \Delta x_{-2}.$$

Для определения коэффициентов a_0, a_1, a_2 составляем систему условных уравнений:

$$x_0 = a_0 + a_1 x_{-1} + a_2 x_{-2};$$

$$x_{-1} = a_0 + a_1 x_{-2} + a_2 x_{-3};$$

$$x_{-2} = a_0 + a_1 x_{-3} + a_2 x_{-4};$$

$$\dots$$

$$x_{(-\tau+2)} = a_0 + a_1 x_{(-\tau+1)} + a_2 x_{-\tau}.$$

Усредняя уравнения по правилам Гаусса, можно получить систему из трех нормальных уравнений с тремя неизвестными a_0, a_1, a_2 . Если матрица этой системы обусловлена, то получим однозначное решение: $a_0 = \bar{a}_0, a_1 = \bar{a}_1, a_2 = \bar{a}_2$, где $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$ — некоторые конкретные числа.

Нелинейные уравнения регрессии с ковариацией $x_{-1}x_{-2}$:

$$x_0 = a_0 + a_1 x_{-1} + a_2 x_{-2} + a_3 x_{-1} x_{-2};$$

$$\Delta x_0 = a_1 \Delta x_{-1} + a_2 \Delta x_{-2} + a_3 (x_{-1} \Delta x_{-2} + x_{-2} \Delta x_{-1} + \Delta x_{-1} \Delta x_{-2}).$$

Система условных уравнений:

$$x_0 = a_0 + a_1 x_{-1} + a_2 x_{-2} + a_3 x_{-1} x_{-2};$$

$$x_{-1} = a_0 + a_1 x_{-2} + a_2 x_{-3} + a_3 x_{-2} x_{-3};$$

$$\dots$$

$$x_{(-\tau+2)} = a_0 + a_1 x_{(-\tau+1)} + a_2 x_{-\tau} + a_3 x_{(-\tau+1)} x_{-\tau}.$$

Определяем оценки коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 .

Квадратичные нелинейные уравнения регрессии:

$$x_0 = a_0 + a_1 x_{-1} + a_2 x_{-2} + a_3 x_{-1} x_{-2} + a_4 x_{-1}^2 + a_5 x_{-2}^2;$$

$$\Delta x_0 = a_1 \Delta x_{-1} + a_2 \Delta x_{-2} + a_3 (x_{-1} \Delta x_{-2} + x_{-2} \Delta x_{-1} + \Delta x_{-1} \Delta x_{-2}) + 2a_4 x_{-1} \Delta x_{-1} + 2a_5 x_{-2} \Delta x_{-2}.$$

Составление системы нормальных уравнений и оценка коэффициентов — аналогично предыдущим примерам.

Так же можно найти (если имеется достаточно экспериментальных точек) неполное и полное кубические уравнения, уравнение четвертой степени и т. д.

Проследим характер изменения ошибки $\Delta^2(2)$ в процессе усложнения уравнения регрессии. Среднеквадратическая ошибка для алгебраического уравнения выражается так:

$$\Delta(1) = \frac{\sqrt{(x_0^* - x_0)^2 + (x_{-1}^* - x_{-1})^2 + \dots + (x_{(-\tau+1)}^* - x_{(-\tau+1)})^2}}{\sqrt{x_0^2 + x_{-1}^2 + \dots + x_{(-\tau+1)}^2}} \cdot 100\%.$$

Для дифференциального уравнения регрессии:

$$\Delta^2(2) = \sqrt{\frac{(\Delta x_0^* - \Delta x_0)^2 + (\Delta x_{-1}^* - \Delta x_{-1})^2 + \dots + (\Delta x_{(-\tau+1)}^* - \Delta x_{(-\tau+1)})^2}{\Delta x_0^2 + \Delta x_{-1}^2 + \dots + \Delta x_{(-\tau+1)}^2}} \times 100\%.$$

Здесь звездочкой отмечены значения x или Δx , взятые по таблице исходных данных, а без звездочки — значения этих же величин, рассчитанные по указанным выше уравнениям регрессии.

Прежде всего следует сделать вывод, что ошибки $\Delta(1)$ и $\Delta^2(2)$ при увеличении сложности уравнения регрессии только случайно могут стать равными нулю. В общем случае первое слагаемое отлично от нуля:

$$(x_0^* - x_0) \neq 0; (\Delta x_0^* - \Delta x_0) \neq 0.$$

В этом легко убедиться, подставив любые из указанных выше уравнений регрессии: в них нет членов с индексом нуль, следовательно, точная компенсация невозможна.

Во вторых, сложность частных (и полного) уравнений регрессии увеличивается дискретно так, что рассматриваемая задача относится к *цельно-численному программированию*. Кроме того, увеличение сложности не безгранично, а определяется числом заданных точек. При четырех точках можно составить только линейное уравнение и уравнение с ковариацией, при шести — предельно возможная сложность достигается на квадратичном уравнении и т. д.

На рис. 14 показана «плоскость усложнения» модели для примера прогнозирования среднегодового расхода Днепра. Подробно пример будет рассмотрен ниже.

Координатами плоскости усложнения модели являются: V — номер по сложности частных уравнений регрессии; V_1, V_2, V_3 — линейное, с ковариацией и квадратичное частные уравнения регрессии соответственно; W — номер по сложности полных уравнений регрессии (получаемых из системы частных уравнений при помощи исключения промежуточных переменных); W_1, W_2, W_3 — первый, второй, третий и т. д. ряды селекции.

Минимум ошибки $\Delta^2(2)$ определяет собой выбор наиболее регулярных (точных) дифференциальных и, следовательно, соответствующих им алгебраических частных и полного уравнений регрессии.

Минимумы ошибок $\Delta(1)$, $\Delta^2(1)$ и $\Delta^2(2)$ совпадают, т. е. находятся в одной и той же клетке табл. 12. Именно это дает возможность

использовать критерий $\Delta^2(2)$ как первое внешнее дополнение для алгебраических уравнений регрессии вместо критерия $\Delta(1)$.

Область применения критерия селекции $\Delta^2(2)$ и новая постановка задачи теории регуляризации. Как уже отмечалось, переход к новому критерию $\Delta^2(2) \rightarrow \min$ регуляризации исключает разделение имеющихся точек на обучающую и проверочную последовательности как в задачах прогнозирования, так и в задачах идентификации. Это положение справедливо при условии, что интервалы отсчета переменных достаточно большие. При малых интервалах высокочастотные помехи могут так исказить приращения, что они уже не будут мерой производной. Именно из-за наличия помех не рекомендуется использование вторых, третьих и т. д. производных.

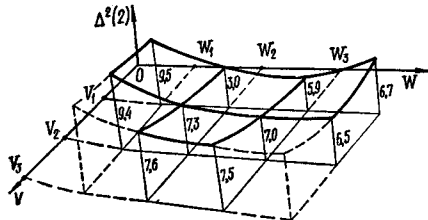


Рис. 14. Поиск минимума ошибки $\Delta^2(2)$ на плоскости усложнения частных и полного полиномов регрессии (пример прогноза расхода воды в р. Днепр).

При наличии помех и при малых интервалах отсчета переменных использование критерия $\Delta(1)$ может оказаться более эффективным, чем применение критерия $\Delta^2(2)$. Этот вопрос еще полностью не исследован.

Кроме учета помех, возникает новая задача: вместо поиска целесообразного разделения имеющихся точек следует найти целесообразное разделение уравнений. Действительно, почему все алгебраические уравнения используются для определения коэффициентов, а все дифференциальные — для селекции? Критерий $\Delta^2(2)$ можно рассматривать как оценку точности дифференциального и соответствующего ему алгебраического уравнений регрессии. При этом для определения коэффициентов можно использовать как те, так и другие уравнения.

Перебор возможных комбинаций систем уравнений по критерию $\Delta^2(2)$ (возможно с использованием селекции) — единственный путь, который можно предложить сейчас для решения задачи целесообразного разделения уравнений.

Применение ошибок в качестве первого и второго внешнего дополнения. Для алгебраических уравнений регрессии:

$\Delta(об)$ и $\delta(об)$ — относительная и абсолютная среднеквадратичная ошибки на обучающей последовательности точек, %;

$\Delta(1)$, $\delta(об)$ — то же на отдельной, первой проверочной последовательности точек (первое внешнее дополнение);

$\Delta(2)$, $\delta(2)$ — то же на отдельной, второй проверочной после-

довательности точек (второе внешнее дополнение);

Для дифференциальных уравнений регрессии:

$\Delta^2(об)$, $\delta^2(об)$ — относительная и абсолютная среднеквадратичная ошибки на обучающей последовательности точек, %;

$\Delta^2(1)$, $\delta^2(1)$ — то же на отдельной, первой проверочной последовательности точек (первое внешнее дополнение);

$\Delta^2(2)$, $\delta^2(2)$ — то же на всех точках (первое внешнее дополнение для алгебраических и второе — для дифференциальных уравнений).

В соответствии с изложенным выше, при использовании алгебраическими уравнениями ошибку $\Delta^2(2)$ можно использовать как первое внешнее дополнение, т. е. для селекции наиболее регулярных (точных) уравнений вместо ошибки $\Delta(1)$. Второе внешнее дополнение используется для решения других, связанных с селекцией вопросов, например, для оптимизации разделения точек на указанные последовательности и оценки способов регуляризации, для выбора оптимальной сложности частных описаний при дифференциальном прогнозе и т. п.

При использовании дифференциальных уравнений ошибку $\Delta^2(2)$ можно применить только как второе внешнее дополнение (аналог ошибки $\Delta(2)$). Селекция уравнений идет, по-прежнему, по критерию $\Delta^2(1)$, разделение точек на последовательности остается необходимым.

Можно было бы продолжить введение разностных ошибок, еще раз продифференцировать уравнение регрессии и получить ошибку $\Delta^4(2)$ как меру первого внешнего дополнения для дифференциальных уравнений. Однако при наличии помех и малых интервалах дискретизации времени к такой рекомендации следует относиться с большой осторожностью. Ошибка $\Delta^4(2)$ в дальнейшем не используется.

Все полученные рекомендации о способах разделения точек на последовательности остаются необходимыми и с учетом появления восьмого способа регуляризации хотя бы потому, что для дифференциальных уравнений регрессии точки все равно приходится разделять, так как восьмой способ регуляризации для таких уравнений из-за помех неприменим. Восьмой способ рекомендуется только для синтеза трендов и алгебраических уравнений регрессии.

Ниже на примерах оптимизации шестого и четвертого способов регуляризации показан метод, при помощи которого получены предложенные рекомендации.

ОПТИМИЗАЦИЯ ШЕСТОГО СПОСОБА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Регуляризация среднесрочного прогноза состоит в разделении узлов интерполяции на две последовательности: последние по времени узлы образуют обучающую последовательность, проверочную последовательность целесообразно сдвинуть назад на L лет. Величина оптимального сдвига рассчитывается для каждой конкретной задачи, как будет показано ниже. Выбор оптимального

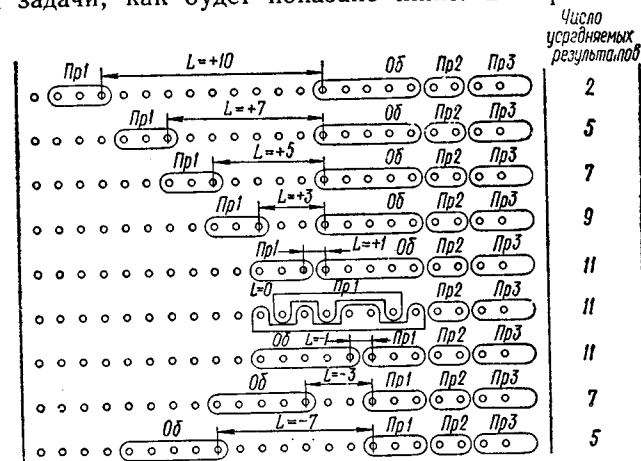


Рис. 15. Варианты размещения обучающей (Об), первой (Пр1), второй (Пр2) и третьей (Пр3) проверочных последовательностей по оси времени (23 узла интерполяции).

значения сдвига L зависит как от времени упреждения прогноза, так и от числа лет, для которых рассчитывается прогноз второй проверочной (экзаменационной) последовательности (размер Пр2).

Рассмотрим случай оптимизации ошибки прогнозирования $\Delta(2)$ при изменении двух переменных: m — степени полинома и L — расстояния между крайними точками обучающей и проверочной последовательностей по оси времени.

При этом

$$\Delta(z)(m, L); \Delta(2) \rightarrow \min; m \rightarrow m_{\text{опт}}; L \rightarrow L_{\text{опт}}.$$

Таким образом, рассматривается выделение тренда оптимальной сложности при изменении степени полинома и взаимного расположения обучающей и проверочной последовательностей по оси времени.

Задача решается при использовании двух проверочных последовательностей. Вариации размещения обучающей (Об), первой (Пр1) и второй (Пр2) проверочных последовательностей по оси времени показаны на рис. 15. Обучающая последовательность исполь-

зуется для определения оценок коэффициентов уравнений регрессии, первая проверочная — для оптимизации m , вторая экзаменационная — для оптимизации L .

Ошибка определялась на примере прогнозирования степени загрузки промышленности Англии $\Phi_3 = A$. Расчет многократно повторялся при следующих значениях аргументов: $m = 1; 2; 3; 4; 8; 12; L = -7; -3; -1; 0; +1; +3; +5; +7; +10$.

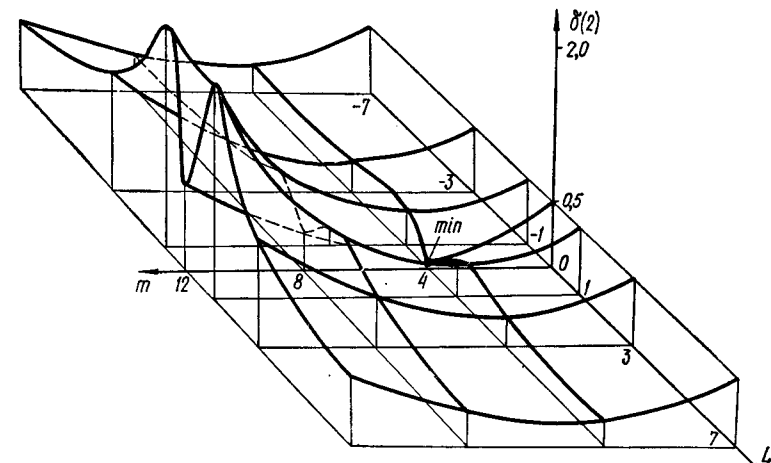


Рис. 16. Оптимизация ошибки краткосрочного прогноза ($T_y = 1, T_y = 2$). Минимум ошибки при $m = 4, L = 0$.

Исходные данные (табл. 5) содержат 23 узла интерполяции, что позволяет усреднить результаты нескольких прогнозов (число усредненных прогнозов указано на рис. 15 справа)*. В таблице приняты следующие обозначения: $K = V_4$ — вложение капитала в производство; K_{FC} — заграничные вложения корпораций; K_{FG} — заграничные вложения государства; C — расходы некорпорированных производителей на товары потребления; X — экспорт из-за границы; $G = V_5$ — расходы государства на товары и обслуживание; S_n — сбережения некорпорированных производителей; W — зарплата некорпорированных производителей; P — доходы корпораций; M — плата за импорт (за границу); D — доходы, распределяемые корпорациями (дивиденды, проценты); $U = V_3$ — дотации государства (помощь безработным); $T_n = V_1$ — налоги на некорпорированных производителей; R_c — возвраты корпорациям от заграничных вкладов; $T_c = V_2$ — налоги на корпорации; R_g — возвраты государству от заграничных вкладов; S_c — сбережения

* Данные взяты (при консультации проф. П. Паркса) из справочника [85].

Таблица 5

Исходные данные

Годы	Пере-								
	$\Phi_1 = K$	$\Phi_2 = K_F =$ $= K_{FG} + K_{FC}$	$X_1 = C$	$X_2 = I$	$X_3 = I_{FG} +$ $+ I_{FC}$	$X_4 = W$	$X_5 = \Pi$	$X_6 = S_H$	$X_7 = S_G$
1947	57011	23107	7975	1199	-381	7437	1849	114	236
1948	58433	23133	8552	1422	26	8090	2013	41	643
1949	60010	23132	8907	1577	-1	8621	2101	126	752
1950	61710	23439	9400	1700	307	9016	2461	128	860
1951	63599	23070	10150	1889	-369	9938	2860	114	801
1952	65705	23233	10691	2106	163	10597	2497	380	569
1953	68064	23378	11402	2359	145	11173	2697	428	493
1954	70616	23495	12091	2552	117	11862	3038	374	562
1955	73445	23340	13038	2829	-155	12905	3313	477	795
1956	76548	23548	13744	3103	209	13983	3395	761	740
1957	79929	23781	14509	3381	233	14739	3526	754	861
1958	83421	24125	15296	3492	344	15256	3478	624	956
1959	87157	24268	16117	3736	143	15997	3872	819	878
1960	91277	24003	16933	4120	-255	17188	4454	1222	749
1961	95896	23999	17830	4613	-4	18523	4384	1702	910
1962	100627	24111	18910	4731	112	19462	4417	1576	1317

(абсолютные значения) для прогноза «Англия»

менные									
$X_8 = X_C$	$X_9 = R_G$	$X_{10} = R_C$	$X_{11} = D$	$X_{12} = X$	$X_{13} = M$	$M_1 = I_H -$ $- U$	$M_2 = T_C$	$M_3 = G$	$\Phi_3 =$ $= 1 - \frac{\Pi + W}{1/3 K}$
791	-55	338	800	2067	2493	586	517	1788	0,511
979	-41	471	730	2758	2761	658	629	1813	0,481
1017	-40	475	740	3067	3050	749	788	2037	0,464
1344	-51	674	800	3807	3492	762	782	2123	0,442
1417	-61	734	810	4497	4838	894	750	2488	0,396
1251	51	726	810	4590	4511	817	985	2958	0,402
1339	36	683	840	4495	4414	733	968	3101	0,389
1507	-20	706	920	4671	4545	824	893	3185	0,367
1856	-24	737	1000	5045	5175	889	972	3251	0,338
1909	-47	826	1050	5564	5291	988	894	3515	0,319
2046	-54	874	1100	5856	5549	1090	972	3668	0,314
2059	-74	965	1124	5839	5425	1148	1010	33	0,326
2244	-82	992	1236	6016	5791	1118	968	4001	0,316
2296	-94	955	1549	6309	6483	1335	715	4248	0,289
226	-118	983	1749	6587	6480	1609	813	4589	0,283
2249	-121	1081	1784	6840	6607	1770	981	4920	0,288

Годы	Пере-								
	$\Phi_1 = K$	$\Phi_2 = K_F = K_{FG} + K_{FC}$	$X_1 = C$	$X_2 = I$	$X_3 = I_{FG} + I_{FC}$	$X_4 = W$	$X_5 = \Pi$	$X_6 = S_H$	$X_7 = S_G$
1963	105534	24225	20087	4907	114	20407	5032	1654	1045
1964	111391	23830	21459	5857	-395	22048	5613	1829	1424
1965	117695	23753	22885	6304	-77	23797	5850	2017	1820
1966	124399	23796	24232	6704	43	25423	5580	2194	2278
1967	131638	23484	25362	7239	-312	26438	5850	2122	2108
1968	139527	23165	27113	7889	-319	28253	6504	2027	3010
1969	147455	23581	28618	72749	416	30183	6523	2311	4243

корпораций; S_G — сбережения государства; I — деньги, которые инвестируются внутри страны; I_{FG} — заграничные вложения государства; I_{FC} — заграничные вложения корпораций; $\Phi_3 = A$ — степень загрузки промышленности.

Результаты расчета ошибки краткосрочного прогноза (на один год вперед) изображены на рис. 16. Оптимальные значения аргументов оказались равными: $m_{\text{опт}} = 4$ и $L_{\text{опт}} = 0$. Результаты расчета ошибки среднесрочного прогноза (на 4 года вперед) представлены графически на рис. 17.

Здесь оптимальные значения аргументов $m_{\text{опт}} = 3$ и $L_{\text{опт}} \geq 10$. Таким образом, можно сделать вывод, что для среднесрочного прогноза целесообразно сдвинуть проверочную последовательность не менее, чем на семь лет назад по отношению к обучающей последовательности.

Обобщение результатов. Для нормализации найденного результата сравним полученный сдвиг во времени (семь лет) со временем когерентности случайного процесса.

Построение автокорреляционной функции (рис. 18) показывает, что в данном случае время когерентности (равное времени, при котором функция существенно отлична от нуля) составляет около 15 лет. Следовательно, сдвиг проверочной последовательности по оси

менные									
$X_8 = X_C$	$X_9 = R_G$	$X_{10} = R_C$	$X_{11} = D$	$X_{12} = X$	$X_{13} = M$	$M_1 = I_H - U$	$M_2 = T_C$	$M_3 = G$	$\Phi_3 = \frac{\Pi + W}{1 - 1/3 K}$
2574	-132	1156	1940	7225	6964	1680	857	5184	0,277
2836	-163	1295	2228	7677	7886	1988	709	5512	0,255
3247	-177	1435	2596	8289	8157	2425	659	6043	0,244
2483	-180	1391	2742	8709	8437	2703	706	6572	0,252
2607	-188	1411	2825	8845	8911	2816	981	7276	0,246
2539	-179	1710	3146	10669	10713	3118	1000	7705	0,253
2511	-175	1956	3426	11986	11318	3519	1124	8118	0,253

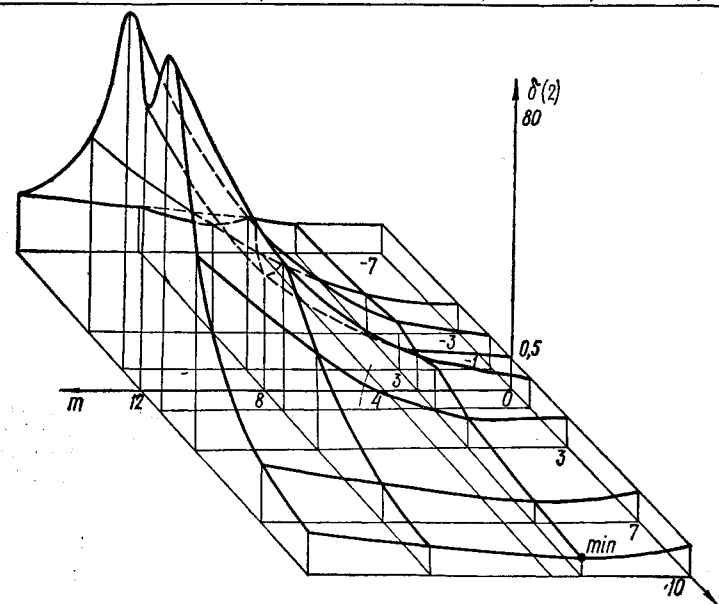


Рис. 17. Оптимизация ошибки среднесрочного прогноза ($T_y = 3$, $T_y = 4$ года). Минимум ошибки при $m = 3$, $L = 10$.

времени должен быть не менее половины времени когерентности данного случайного процесса.

Зависимость оптимальных значений параметров m и L от времени упреждения и числа точек второй проверочной последовательности.

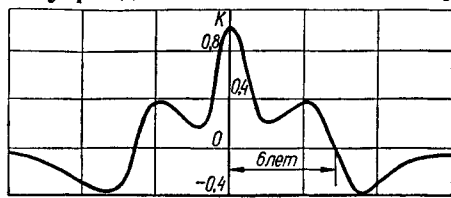


Рис. 18. Автокорреляционная функция K процесса изменения загрузки производства в Англии от сдвига по времени τ .

Характер поверхности зависит не только от времени упреждения, но и от числа узлов интерполяции, включаемых во вторую проверочную последовательность. Например, если вторая проверочная последовательность состоит из трех точек $T_y = 3, T_y = 4, T_y = 5$ годам, то получим $m_{\text{опт}} = 1$. Наилучшим является обычный регрессионный анализ при уравнении регрессии первой степени.

Пример 6. Прогноз загрузки промышленности Англии на 3—4 года вперед, с выделением тренда оптимальной сложности при целенаправленной регуляризации*. Отсчет от среднего значения и оптимальная нормализация переменных. Исходная информация для построения тренда может быть представлена рядом среднегодовых показателей за 10—20 лет наблюдения. Для достижения наилучшей обусловленности матриц [69] применяется отсчет переменных в отклонениях от среднего значения и нормирование каждой из них по стандартному отклонению:

$$x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\sigma}; \quad \sigma = \sqrt{D^2} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X}_i)^2}.$$

В следующих примерах будем пользоваться и другими способами центрирования и нормализации, например такими:

$$x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \quad \text{или} \quad x_i = \frac{X_i - X_{i \min}}{X_{i \max} - X_{i \min}}.$$

Последний способ называется «знакопостоянным нормированием».

В качестве обучающей последовательности использовались 13-, 14-, 15-, 16- и 17-я точки интерполяции, в качестве первой проверочной последовательности — 1-, 2- и 3-я точки, а в качестве второй — 20- и 21-я точки (прогноз на 3 и 4 года). Отбор полиномов проводился по среднеквадратической ошибке $\Delta(1)$ на первой проверочной последовательности. В данном примере минимум ошибки $\Delta(1)$ находится в 3-м ряду. Это служит основанием для выбора тренда в таком виде:

$$\begin{aligned} \text{3-й ряд} \quad \varphi &= 0,04491 + 3,8273z_2 - 2,9231z, \quad \Delta(1) = 5,59\%; \\ \text{2-й ряд} \quad z_1 &= 0,2688 + 5,7125y_1 - 5,2856y_2, \quad \Delta(1) = 9,36\%; \end{aligned}$$

* Пример написан совместно с аспирантом Ю. В. Чукиным.

$$z_2 = 0,2726 - 11,546y_2 + 11,965y_3, \quad \Delta(1) = 12,66\%;$$

$$\text{1-й ряд} \quad y_1 = -2,7225 + 3,0976x_1 - 0,3451x_3, \quad \Delta(1) = 42,18\%;$$

$$y_2 = -0,8180 + 1,030x_2, \quad \Delta(1) = 57,15\%;$$

$$y_3 = -1,1715 + 1,9464x_3 - 0,7353x_2, \quad \Delta(1) = 35,83\%.$$

Исключая промежуточные переменные, получим аналог полного уравнения тренда:

$$\varphi = 15,596 - 51,626t - 63,15t^2 + 94,562t^3.$$

Проверка точности прогноза. Подставив в уравнение время, соответствующее 20- и 21-й точкам, находим $\varphi_{20} = 2,245$; $\varphi_{21} = 0,3379$.

Перейдя от нормированных значений к абсолютным, получим $\Phi_{20} = 0,78108$; $\Phi_{21} = 0,71900$.

В действительности $\Phi_{20}(1966) = 0,71777$ и $\Phi_{21}(1967) = 0,71178$.

Отсюда абсолютные и относительные ошибки прогноза:

$$\Delta\Phi_{20} = 0,0633; \quad \Delta_{20} = 8,82\%;$$

$$\Delta\Phi_{21} = 0,0072; \quad \Delta_{21} = 1,01\%.$$

Другие выходные параметры экономики Англии можно прогнозировать на 3—4 года вперед аналогичным образом.

Выше в качестве опорной функции использовались степенные полиномы. Если точность прогноза при них оказывается недостаточной ($\Delta(1)_{\text{норм}} > 0,05$), можно попробовать изменить вид опорной функции. Например, применить ряд Лорана (от двух вещественных переменных), дробно-полиномиальные частные описания, гармоническое разложение (спектральный анализ) и др.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧЕТВЕРТОГО СПОСОБА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Понятие целенаправленной регуляризации неразрывно связано с задачей определения математической модели процесса. Рассмотрим случай, когда требуется построить математическую модель процесса в виде его тренда для решения задачи прогнозирования будущих значений интересующей нас величины со временем упреждения T_y . Величину T_y удобно измерять числом тактов наблюдения процесса.

Допустим, задано N точек процесса. Для получения оценки прогнозирующих свойств ряда способов регуляризации имеющиеся точки разобьем следующим образом. Группу первых по времени $(N - T_y - C)$ точек выделим для построения прогнозирующего полинома. Эта группа будет состоять из точек обучающей и проверочной последовательностей, разделенных по-разному в зависимости от способа регуляризации. Следующие T_y точек выделим для образования второй проверочной (экзаменационной) последовательности.

Оставшиеся C точек служат для усреднения ошибок прогнозирования при данном способе регуляризации. Осуществляется это при помощи последовательного сдвига первых $(N - T_y)$ точек от 1 до C . При этом каждый раз на точках $(j \dots N - T_y - C + j)$ строится

полином, а на точках $(N - T_y - C + j + 1 \dots N - C + j)$ при $j = \overline{1, C}$ определяется его ошибка прогнозирования, которая затем усредняется для всех C разновременных прогнозов.

Критерием сравнения способов регуляризации является усредненная среднеквадратичная ошибка для каждого из нас, определяемая на второй проверочной последовательности:

$$\Delta(2)_{\text{норм}} = \sqrt{\frac{1}{cT_y} \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^{T_y} |\varphi_j(t_i) - \varphi_j^*(t_i)|^2},$$

где $\varphi_j(t_i)$ — значения ординат процесса в точках экзаменационной последовательности; $\varphi_j^*(t_i)$ — значения ординат аппроксимирующих полиномов.

Пример 7. Определение оптимального способа целенаправленной регуляризации для выделения тренда процесса изменения степени загрузки промышлен-

Таблица 6

Выбор оптимального варианта шестого способа регуляризации

Варианты шестого способа регуляриза- ции	Изображение варианта способа регуляризации бинарным кодом (1947—1959 гг.)	Ошибки на проверочной последовательности при					
		$m = 4$				$m = 8$	
		Время упреждения T_y , годы					
		3		5		3	
		$\Delta(1)$	$\Delta(1)_{\max}$	$\Delta(1)$	$\Delta(1)_{\max}$	$\Delta(1)$	$\Delta(1)_{\max}$
I	101010101010101	0,061	0,094	0,137	0,226	0,274	0,132
II	1001001001001001	0,054	0,043	0,112	0,086	0,214	0,177
III	10001000100010001	0,043	0,037	0,092	0,081	0,076	0,021
IV	00100001000001	0,128	0,130	0,330	0,330	0,080	0,163
V	10000010000001	0,058	0,046	0,126	0,101	0,086	0,303
VI	00000100000001	0,164	0,151	0,460	0,405	0,070	0,147
VII	00010000000001	0,068	0,088	0,191	0,220	0,053	0,087
VIII	01000000000001	0,053	0,061	0,116	0,139	0,078	0,120
IX	00000000000001	0,044	0,044	0,102	0,102	0,067	0,067
X	00000000011111	0,992	1,121	3,112	3,493	5,541	6,225

Примечание: 1 — точки на проверочной последовательности; 0 — точки на обучающей последовательности. Минимум ошибки выделен рамкой.

ности: Англии*. Сравним между собой только такие способы регуляризации, при которых всегда $(N - T_y - C)$ -я точка, а также точки, расположенные по оси времени через одну, через две, через три и т. д., относят в проверочную последовательность. Таким образом, ограничимся рассмотрением дискретного множества возможных способов регуляризации, общее число которых равно $(N - T_y - C)$.

Используя из заданных только $(N - T_y - C)$ точек и пользуясь каждым из указанных способов регуляризации по очереди, можно получить тренды оптимальной сложности вида

$$\varphi_2^*(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m.$$

Выберем оптимальный вариант регуляризации, дающий минимум ошибки на экзаменационной последовательности. При небольшом числе точек такой выбор лучше всего сделать при помощи перебора указанных в табл. 6 вариантов регуляризации.

Исходные данные приведены в табл. 5. Данные первых 13-ти годов (1947—1959 гг.) использованы для получения оценок коэффициентов полиномов $\varphi_2^*(t)$ и для выделения первой проверочной последовательности по вариантам регуляризации, указанным в табл. 6. Данные последующих годов (1960—1969 гг.) использованы в качестве второй проверочной (экзаменационной) последовательности. В табл. 6 первая цифра кода относится к 1947 г., последующие — к 1948 г. и т. п.; последняя цифра бинарного кода указывает, в какой последовательности (обучающей или первой проверочной) использованы данные за 1959 г.

Сравнивалось десять вариантов регуляризации, указанных в табл. 6. Там же указаны ошибки на экзаменационной последовательности для $T_y = 3$ и $T_y = 5$ лет, усредненные для всех полиномов ($C = 6$), полученных при каждом варианте регуляризации.

Оптимальным оказался третий вариант (рис. 19), при котором в проверочную последовательность войдут точки, взятые через три года, так как при $\Delta t = 3$ получен наиболее глубокий минимум ошибки $\Delta(2)$ **.

При найденном варианте регуляризации получены следующие уравнения тренда загрузки производства Англии (переменная $\Phi_0 = \frac{\Phi_3 - \Phi_3}{\Phi_3}$) (рис. 20, в).

$$\Phi_0 = -0,00021 + 2,87597v_5 - 1,9245v_8;$$

$$v_5 = -0,00028 + 4,09314z_5 - 3,1603z_6;$$

$$v_8 = -0,000075 - 0,73735z_8 + 1,71865z_6;$$

* Пример написан совместно с аспирантом Ю. В. Чукиным.

** При выделении гармоник кривой стока р. Днепр оказывается, что наибольшие амплитуды имеют гармоники с периодами 5, 9 и 12 лет, что приблизительно соответствует удвоенной периодичности минимумов табл. 9 (3, 4, 6 лет) и нулям кривой рис. 13.

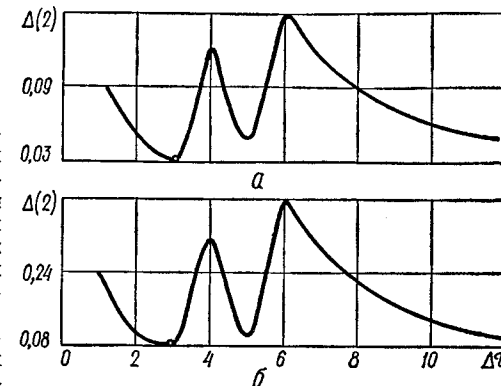


Рис. 19. Выбор оптимального способа регуляризации при квадратичном критерии: а — $m = 4$, $T_y = 3$; б — $m = 4$, $T_y = 5$; $\Delta(2)$ — относительная ошибка на второй проверочной последовательности; Δt — шаг отбора точек в первую проверочную последовательность. Точкой на кривых отмечен первый минимум ошибки.

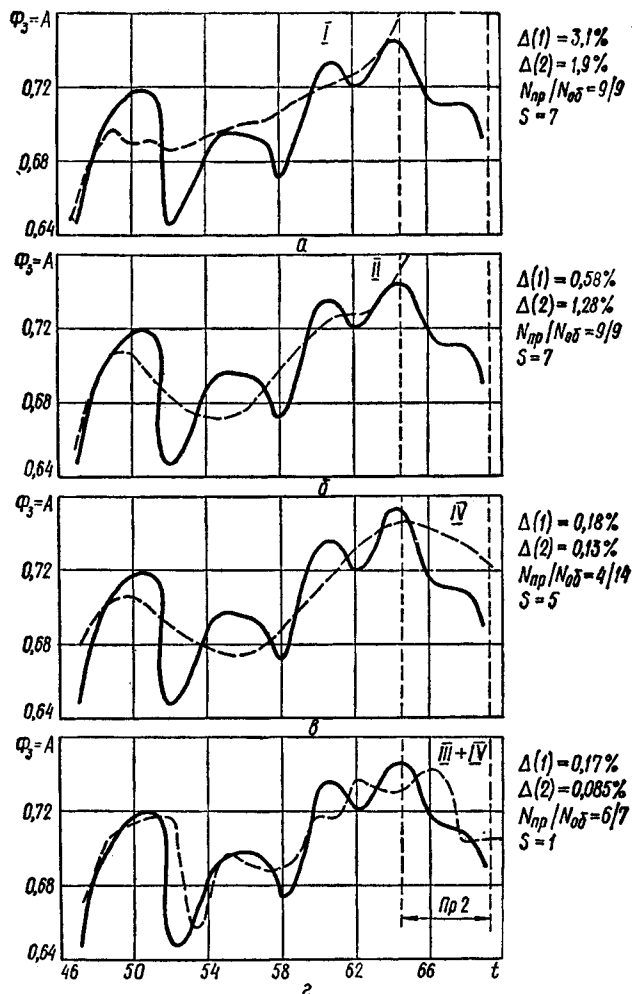


Рис. 20. График прогноза загрузки производства Англии на 1947—1969 гг.:

а, б, в — с выделением полиномиального тренда; г — с выделением тренда и остатка. Римские цифры указывают способы регуляризации. По оси t сокращенно отмечены годы.

$$\begin{aligned}
 z_5 &= 0,000035 + 0,850298y_5 + 0,15792y_2; \\
 z_6 &= -0,0000062 + 1,190006y_6 - 0,19146y_3; \\
 z_8 &= -0,000013 + 1,07145y_8 - 0,07455y_4; \\
 y_2 &= -0,000407 + 2,035198x_2 - 1,13121x_4; \\
 y_8 &= 0,000099 + 0,928829x_6 + 0,994648x_3;
 \end{aligned}$$

$$y_6 = -0,00019 + 1,26573x_6 - 0,310625x_2;$$

$$y_8 = -0,000031 + 1,03366x_8 - 0,04097x_2.$$

Добавление учета остатка (при четвертом способе регуляризации — для тренда и третьем — для остатка) немного повышает точность прогнозирования. Уравнение прогноза (рис. 20, г):

$$\varphi = d_1(t) + 0,007 - 0,071x_{14} - 0,064x_{25} - 0,181x_{14}x_{15} - 0,431x_{14}^2,$$

где $x_{14} = v_{2,-7}$; $x_{25} = v_{5,-6}$.

При оптимальной регуляризации тренд, начиная с точки 1964 г., повернул вниз, хотя, казалось бы, никаких оснований для этого до указанной точки не было. Объясняется это тем, что, очевидно, сработали такие механизмы учета вторых и более высоких разностей, которые человеческий глаз не различает.

Рис. 20 подтверждает, что указанные способы регуляризации являются действительно эффективными.

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ МГУА И СПОСОБОВ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОКРАТНОГО СРЕДНЕСРОЧНОГО ПРОГНОЗА

Сравним по точности алгоритмы прогнозов и способы регуляризации, указанные в табл. 8 на двух конкретных прогнозах. Исходные данные для прогнозирования приведены в табл. 5 (прогноз «Англия») и в табл. 7 (прогноз «Днепр»).

По табл. 8 легко проследить основную методику сравнения точности алгоритмов: сложность алгоритмов постепенно возрастает, а способы регуляризации опробываются по очереди.

Конечно, к выводам, полученным на основании рассмотрения примеров, следует относиться с осторожностью, но общее исследование невозможно.

Методика сравнения уже пояснялась выше: оптимизация сложности алгоритма МГУА и оптимизация способа регуляризации взаимосвязаны. Поэтому критерием оптимальности может быть только «второе внешнее дополнение» — ошибка, измеряемая на второй проверочной (экзаменационной) последовательности.

Основной критерий сравнения — среднеквадратичная ошибка прогноза, рассчитанная на второй проверочной (экзаменационной) последовательности $\Delta(2)$, %.

Одновременно рассматриваются два прогноза:

среднесрочный прогноз «Днепр» среднегодового расхода воды в р. Днепр на 1971 г., по данным за 153 года (с 1812 по 1964 гг.). Время упреждения прогноза $T_y = 7$ лет (табл. 9);

среднесрочный прогноз «Англия» степени загрузки производства в Англии на 1969 г., по данным за 18 лет (с 1947 по 1964 гг. включительно). Время упреждения прогноза $T_y = 5$ лет.

Исходные данные для

Годы	0	1	2	3	4	
1810			968	1192	1506	
			4,82	6,48	5,74	
			5	12	14	
1820	2080	1520	1200	1070	1020	
	6,43	7,54	7,08	7,16	6,96	
	16	7	4	2	8	
1830	1840	1800	1360	1180	1520	
	8,38	6,91	4,95	6,02	7,68	
	71	48	28	8	13	
1840	1670	1670	760	970	1740	
	7,80	6,15	4,31	5,96	9,17	
	63	37	24	11	15	
1850	1560	1520	1440	1840	1600	
	7,84	7,77	6,91	8,20	6,72	
	66	64	54	39	21	
1860	1560	2080	1230	790	880	
	6,15	7,08	8,11	4,69	6,90	
	96	77	59	44	47	
1870	1230	1740	1560	970	700	
	6,86	7,14	6,39	6,32	5,89	
	139	111	102	66	45	

прогноза «Днепр»

	5	6	7	8	9
	1420	1845	1170	1300	1400
	5,50	7,87	7,46	5,96	5,42
	35	46	41	30	24
	1560	1070	1140	1800	2180
	7,06	5,41	5,90	8,20	9,59
	17	36	50	62	67
	880	910	1470	1690	1340
	5,14	5,78	7,32	5,02	5,86
	57	122	138	103	86
	2600	880	1230	1070	2080
	7,98	6,51	5,09	4,42	6,06
	40	62	98	124	96
	1660	1320	1140	1230	880
	8,44	6,69	7,02	4,52	5,50
	7	4	23	55	94
	1480	1400	1740	1740	1070
	5,62	6,80	9,54	7,23	7,07
	30	16	7	37	74
	790	1840	2400	1700	2290
	5,25	6,69	7,27	7,29	7,92
	17	11	12	3	6

Таблица 7

Годы	0	1	2	3	4
1880	1400	1320	964	1690	1210
	7,92	6,51	55,7	8,90	7,67
	32	54	60	64	64
1890	1160	1260	949	1480	1300
	5,38	7,19	5,86	6,88	6,45
	7	36	73	85	78
1900	1400	1080	1580	1400	943
	6,45	6,54	7,65	4,13	6,47
	10	3	5	24	42
1910	1070	1120	1640	1610	1440
	7,07	5,06	6,06	4,23	7,24
	19	6	4	1	10
1920	1220	595	1460	1420	1510
	5,32	4,88	6,93	6,93	8,03
	38	26	14	6	17
1930	984	2080	2100	2270	1640
	7,38	8,99	8,80	8,16	6,85
	36	21	11	6	9
1940	1460	1890	1910	882	1270
	6,63	7,91	5,22	5,94	6,44
	68	48	31	16	10

5	6	7	8	9
1060	1310	1190	1670	1600
7,75	6,71	6,71	6,32	6,51
52	25	13	7	6
1960	1630	1350	1030	1120
6,60	6,18	6,69	6,22	7,44
64	42	26	27	12
1510	1740	1690	1840	1440
7,41	7,45	6,11	7,36	6,28
64	54	62	48	44
1500	1800	1960	1140	1670
5,42	9,84	7,20	6,48	5,86
47	57	104	81	64
768	1600	1580	1580	1550
6,71	9,19	7,44	7,64	5,73
44	64	69	78	65
1430	1290	1270	1310	905
7,17	7,20	6,29	5,04	5,73
36	80	114	110	89
1230	1160	1340	1490	1080
6,55	6,25	6,02	6,16	6,85
33	93	152	136	135

Годы	0	1	2	3	4
1950	933	1300	1010	1640	842
	7,94	7,27	5,96	6,38	5,97
	84	69	31	14	4
1960	1080	1150	1700	1250	992
	7,45	5,65	7,67	5,30	4,96
	112	54	33	28	10
1970	2490	1830	1030	1060	
	6,91	5,39			
	70				

Примечание. Верхние цифры в графе для каждого года—среднегодовой расход р. Днепр

Нормированный отсчет переменных от трендов. В программах [49, 70] предусмотрен пересчет абсолютных цифр в нормированные отклонения от среднего значения, либо от тренда. Например, для рассматриваемых прогнозов в алгоритме МГУА с трендом нулевой степени

$$d = \frac{D - \bar{D}}{\bar{D}}; \quad n = \frac{N - \bar{N}}{\bar{N}}; \quad s = \frac{S - \bar{S}}{\bar{S}}; \quad a = \frac{A - \bar{A}}{\bar{A}},$$

где $\bar{D} = 1412$, $n = 6,68$, $\bar{S} = 50,14$ — средние значения (за 153 года); $A = \Phi_3$.

В алгоритме МГУА с трендом степени больше нуля

$$d = \frac{D - D^*}{D^*},$$

где D^* — текущее значение тренда в данной точке.

Величины n и s во всех алгоритмах измеряются в нормированных отклонениях от среднего значения, а не от трендов. От трендов отсчитываются только d и a .

Выражения для расчета среднеквадратичных ошибок прогноза «Днепр»:

$$\Delta(1) = \frac{\sum_{i=1}^{p_1} (D_i - D_{пр i})^2}{\sum_{i=1}^{p_1} D_i^2} \cdot 100\%,$$

Продолжение табл. 7

	5	6	7	8	9
	1350	1590	1360	2160	1300
	6,96	7,59	6,34	9,62	5,10
	38	142	190	185	159
	1100	1580	1400	1200	1340
	5,60	5,90	5,92	5,85	4,38
	15	47	94	107	110

(D), м³/с; средние — то же для р. Неман (N); нижние — число Вольфа (S).

где D_i , $D_{пр i}$ — действительный и прогнозирующий расходы воды; p_1 — число точек в первой проверочной последовательности;

$$\Delta(2) = \frac{\sum_{i=1}^{p_2} (D_i - D_{пр i})^2}{\sum_{i=1}^{p_2} D_i^2} \cdot 100\%,$$

где $p_2 = 1965—1970$ гг. — шесть лет, образующие вторую проверочную последовательность.

Для прогноза «Англия»:

$$\Delta(1) = \frac{\sum_{i=1}^{p_1} (A_i - A_{пр i})^2}{\sum_{i=1}^{p_1} A_i^2} \cdot 100\%,$$

где A_i , $A_{пр i}$ — действительная и прогнозируемая степени загрузки производства соответственно;

$$\Delta(2) = \frac{\sum_{i=1}^{p_2} (A_i - A_{пр i})^2}{\sum_{i=1}^{p_2} A_i^2} \cdot 100\%,$$

Таблица 8

Среднеквадратичная ошибка $\Delta(2)$, %, на второй проверочной (экзаменационной) последовательности при сравнении алгоритмов прогнозов «Днепр»/«Англия»

Особенности алгоритма МГУА		Способы целенаправленной регуляризации				
		V	IV	III	II	I
Использование одной переменной (времени)	Выделение одного (лучшего) тренда	$\frac{1,8}{—}$	$\frac{1,9}{0,13}$	$\frac{4,8}{0,30}$	$\frac{2,3}{18}$	$\frac{3,6}{19}$
	Последовательное выделение двух трендов	$\frac{1,6}{—}$	$\frac{1,6}{0,10}$	$\frac{4,6}{0,26}$	$\frac{2,2}{—}$	$\frac{3,4}{—}$
Использование многих переменных	С нулевым трендом	$\frac{2,9}{—}$	$\frac{3,33}{0,16}$	$\frac{4,87}{—}$	$\frac{3,6}{—}$	$\frac{3,8}{—}$
	С одним (лучшим) трендом	Тренд — V Остаток — III $\frac{1,3}{0,08}$	Тренд — IV Остаток — III $\frac{1,3}{0,09}$	$\frac{4,1}{—}$	$\frac{3,5}{—}$	$\frac{3,7}{—}$
	С двумя трендами	Тренд — V Остаток — III $\frac{1,2}{0,04}$	Тренд — IV Остаток — III $\frac{1,1}{0,07}$	$\frac{3,8}{—}$	$\frac{3,4}{—}$	$\frac{3,5}{—}$
	Последовательное выделение трендов	Тренд — V Остаток — III $\frac{1,3}{0,07}$	Тренд — IV Остаток — III $\frac{1,4}{0,08}$	$\frac{5,6}{—}$	$\frac{3,0}{—}$	$\frac{3,9}{—}$
	Обобщенный алгоритм МГУА	Тренд — V Остаток — III $\frac{1,3}{0,05}$	Тренд — IV Остаток — III $\frac{1,2}{0,06}$	$\frac{4,9}{—}$	$\frac{2,9}{—}$	$\frac{3,7}{—}$

Примечание. Рекомендуемые алгоритмы однократного среднесрочного прогноза выделены рамкой.

где $p_2 = 1965—1969$ гг. — четыре года, образующие вторую проверочную последовательность.

Так как средние значения величин в прогнозах «Днепр» и «Англия» значительно отличаются друг от друга, то сравнивать можно только цифры для нормирования по среднему значению каждой из переменных.

Условия сравнения ряда алгоритмов МГУА

и способов регуляризации для среднесрочного прогноза

Прогноз «Днепр»:

Исходные данные за 1812—1970 гг. представлены в табл. 7;

1. Для образования второй проверочной последовательности используются данные за 1965—1971 гг. (семь лет).

2. Для образования обучающей и первой проверочной последовательности:

а) при выводе уравнений трендов используются данные с 1812 по 1964 гг. включительно (152 точки):

$$D_{1812}, D_{1813}, D_{1814}, \dots, D_{1964};$$

б) при выводе уравнений прогноза по другим переменным (кроме времени) используются данные с 1880 по 1964 гг. включительно (82 точки). Условные уравнения имеют 18 аргументов:

$$D_0 = \varphi_0 = f(D_8, D_9, D_{13}, D_{15}, D_{17}, D_{20},$$

$$N_9, N_{10}, N_{13}, N_{16}, N_{17}, N_{18}, N_{19}, N_{20},$$

$$S_8, S_{14}, S_{19}, S_{20}).$$

Запаздывание отсчета аргументов $T_L > 7$ лет.

Прогноз «Англия»:

Исходные данные за 1947—1969 гг. приведены в табл. 5.

1. Для образования второй проверочной последовательности используются данные за 1965—1969 гг. (пять лет).

2. Для образования обучающей и первой проверочной последовательности:

а) при выводе уравнений трендов (функций времени), полиномиальных или гармонических, используются данные за 18 лет с 1947 по 1964 гг. включительно (18 точек):

$$A_{47}, A_{48}, A_{49}, \dots, A_{64};$$

б) при выводе уравнений прогноза по другим переменным (кроме времени) усредняются тринадцать условных уравнений, имеющих 24 аргумента:

$$\varphi_0 = f(\varphi_{(-5)}, \varphi_{(-6)}, \varphi_{(-7)}, \varphi_{(-8)},$$

$$v_{1(-5)}, v_{1(-6)}, v_{1(-7)}, v_{1(-8)},$$

$$v_{2(-5)}, v_{2(-6)}, v_{2(-7)}, v_{2(-8)},$$

$$v_{3(-5)}, v_{3(-6)}, v_{3(-7)}, v_{3(-8)},$$

$$v_{4(-5)}, v_{4(-6)}, v_{4(-7)}, v_{4(-8)},$$

$$v_{5(-5)}, v_{5(-6)}, v_{5(-7)}, v_{5(-8)}).$$

Запаздывание отсчета аргументов $T_L = 5$ лет.

В последних двух уравнениях отсутствующие данные заменяются средними значениями.

Однократные прогнозы среднегодового стока воды

№ кривой на рис. 29	Методы прогноза	Попутные			
		1971	1972	1973	
2, 3	По двум наиболее точным гармоническим трендам ($\Delta(1) = 1,31$ и $\Delta(1) = 1,39$), при IV способе целенаправленной регуляризации	$\frac{1892}{1851}$	$\frac{1495}{1436}$	$\frac{981}{916}$	
6, 7	По трендам $\Delta(1) = 1,31$ и $\Delta(1) = 1,39$ и по остаткам при комбинированной целенаправленной регуляризации: тренды — IV способ, остаток — III способ	$\frac{1800}{1814}$	$\frac{1461}{1398}$	$\frac{991}{930}$	
1	Прогноз, изложенный в журнале «Автоматика», № 1, 1975*	1600	1075	1128	
8	Действительный расход воды	1830	1030	1060	

Примечание. $\Delta(2) = [(\bar{D}_0 - \bar{D})^2 / (\bar{D}_0^2 - \bar{D}^2)] \cdot 100$.

Последний индекс указывает сдвиг переменной во времени.

Прогнозы по одному (более точному) и по двум трендам. Тренд оптимальной сложности получается по алгоритмам МГУА при постепенном увеличении степени полинома или числа гармоник в полном уравнении регрессии. Сложность увеличивается до тех пор, пока падает ошибка, определяемая на первой проверочной последовательности («правило левого угла»). Различают тренды полиномиальные и гармонические, которые вычисляются по специальным программам [49, 70].

Алгоритмы выделения трендов оптимальной сложности в этих программах основаны на принципах самоорганизации, т. е. представляют собой ряд последовательных выборов слагаемых с обязательным сохранением степени свободы для последующих выборов, кроме последнего ряда, где $F = 1$. Например, каждая последующая гармоника должна «пристраиваться» не к единственной гармонике, а к нескольким лучшим гармоникам предыдущего выбора*. Уравнение регрессии, используемое для прогноза по одному тренду,

* В этой работе частоты гармоник определяются аналитически, а не перебором значений.

Таблица 9

в р. Днепр на 1977 г. ($T_y = 7$ лет)

результаты			Основная цель прогноза	Попутные результаты			$\Delta(2)$ ошибка за 4 года, %
1974	1975	1976		1978	1979	1980	
$\frac{890}{823}$	$\frac{1143}{1101}$	$\frac{1306}{1307}$	$\frac{1210}{1245}$	$\frac{1164}{1225}$	$\frac{1312}{1433}$	$\frac{1558}{1623}$	$\frac{19,1}{24,6}$
$\frac{947}{909}$	$\frac{1181}{1200}$	$\frac{1179}{1217}$	$\frac{1041}{1283}$	—	—	—	$\frac{21,5}{21,1}$
1155	1344	1480	1132	1000	1586	1435	11,0
—	—	—	—	—	—	—	

в общем виде

$$\varphi = f(x_1),$$

где x_1 — одна из характеристических переменных (чаще всего время).

Тренд нулевой степени равен среднему значению $\varphi = \bar{\varphi} = \text{const}$. Приведем некоторые уравнения трендов оптимальной сложности.

Пример 8. Полиномиальные тренды для прогнозов «Днепр» и «Англия»*. Полиномиальный тренд для прогноза «Днепр» (по четвертому способу регуляризации):

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

где $x_1 = t^2$, $x_2 = t$; $a_0 = -0,00109915$; $a_1 = -0,010075$; $a_2 = -0,11051$.

Возможно, что если продолжить селекцию и не останавливаться на первом минимуме ошибки, то получим более точные полиномиальные тренды. Однако при этом уравнения были бы слишком сложными и громоздкими из-за очень высокой степени полинома. Для данного примера лучше выделить не полиномиальный, а гармонический тренд оптимальной сложности.

Полиномиальный тренд для прогноза «Англия» (по четвертому способу регуляризации):

$$\varphi_0 = a_0 + a_1 w_5 + a_2 w_8,$$

где $a_0 = -0,00021$, $a_1 = 2,87597$, $a_2 = -1,9245$;

$$w_5 = a_3 + a_4 v_5 + a_5 v_8,$$

* Пример написан совместно с аспирантом Н. И. Тодуа.

где $a_0 = -0,00028$, $a_1 = 4,09314$, $a_2 = 3,1603$;

$$w_8 = a_0 + a_1 v_8 + a_2 v_8,$$

где $a_0 = -0,000079$, $a_1 = -0,73735$, $a_2 = 1,71855$;

$$v_8 = a_0 + a_1 z_8 + a_2 z_8,$$

где $a_0 = 0,000035$, $a_1 = 0,850298$, $a_2 = 0,15792$;

$$v_8 = a_0 + a_1 z_8 + a_2 z_8,$$

где $a_0 = -0,0000062$, $a_1 = 1,190006$, $a_2 = -0,19146$;

$$v_8 = a_0 + a_1 z_8 + a_2 z_8,$$

где $a_0 = -0,000013$, $a_1 = 1,07145$, $a_2 = -0,07455$;

$$z_2 = a_0 + a_1 y_2 + a_2 y_4,$$

где $a_0 = -0,000407$, $a_1 = 2,035198$, $a_2 = -1,13121$;

$$z_8 = a_0 + a_1 y_8 + a_2 y_2,$$

где $a_0 = 0,0000996$, $a_1 = 0,928829$, $a_2 = 0,0946485$;

$$z_8 = a_0 + a_1 y_8 + a_2 y_2,$$

где $a_0 = -0,00019$, $a_1 = 1,26576$, $a_2 = -0,310625$;

$$z_8 = a_0 + a_1 y_2 + a_2 y_2,$$

где $a_0 = -0,000031$, $a_1 = 1,03366$, $a_2 = -0,04097$;

$$y_2 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_3,$$

где $a_0 = -0,014806$, $a_1 = 0,048332$, $a_2 = 0,096129$;

$$y_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_3,$$

где $a_0 = -0,006629$, $a_1 = 0,094051$, $a_2 = 0,03766$;

$$y_8 = a_0 + a_1 x_8 + a_2 x_7,$$

где $a_0 = -0,000865$, $a_1 = 0,161725$, $a_2 = -0,057165$;

$$y_8 = a_0 + a_1 x_8 + a_2 x_3,$$

где $a_0 = -0,003338$, $a_1 = 0,089256$, $a_2 = 0,022304$;

$$y_8 = a_0 + a_1 x_8 + a_2 x_3,$$

где $a_0 = -0,001834$, $a_1 = 0,0847217$, $a_2 = 0,0048783$.

Полиномиальные тренды оптимальной сложности, при различных способах регуляризации, изображены на рис. 20, а—в (прогноз «Англия»). Наглядно видно, какие по точности прогнозы дает тот или другой тренд: для каждого графика указаны среднеквадратичные ошибки на первой и второй проверочных последовательностях ($\Delta(1)$ и $\Delta(2)$, %).

Уравнение гармонического тренда для прогноза «Днепр» при втором способе регуляризации получено в следующем виде:

$$d_1 = -15,9424 - 100,22 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 2,704 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 5,71 = T_1;$$

$$d_2 = -1,03695 + 64,205 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 51,003 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 13,006 = T_2;$$

$$d_3 = 0,55316 - 160,97 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 72,83 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 9,244 = T_3;$$

$$d_4 = -0,422022 - 78,054 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 48,9965 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 27,028 = T_4;$$

$$d_5 = -2,083477 + 97,145 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 10,7 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 7,648 = T_5;$$

$$d_6 = 2,870647 - 112,17 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 47,9 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 9,814 = T_6;$$

$$d_7 = 0,99235 - 109,72 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 18,1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 4,912 = T_7.$$

При четвертом способе:

$$d_1 = 22,869 - 8,754 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 86,403 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 10,48 = T_1;$$

$$d_2 = -2,223 + 60,18 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 32,085 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 6,28 = T_2;$$

$$d_3 = -2,793 - 138,44 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 29,043 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 13,22 = T_3;$$

$$d_4 = -6,445 + 7,439 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 58,75 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 11,287 = T_4;$$

$$d_5 = -1,569 + 51,348 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 57,109 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 47,092 = T_5;$$

$$d_6 = 0,0906 + 67,29 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 31,96 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) 4,114 = T_6.$$

Сравнение точности прогноза по критериям $\Delta(1)$ и $\Delta(2)$ показало, что для прогноза «Днепр» лучше применить гармонический тренд, а для прогноза «Англия» — полиномиальный (при четвертом способе регуляризации). Заметим, что периоды выделенных гармоник при разных способах регуляризации совершенно различны. Следовательно, они не связаны с физикой процесса.

Только гармоники, выделенные в первом ряду селекции, могут иметь какой-то физический смысл. Синусоиды, выделяемые во втором и последующих рядах, не могут быть интерпретированы с физической стороны, так как они выделяются не по основному процессу, а по разности ординат кривой процесса и синусоиды первого ряда селекции. Эту разность называют остатком.

Прогнозы по двум, последовательно выделяемым трендам.
Уравнение регрессии в этом случае имеет вид

$$\varphi = f_1(t) + f_2(t).$$

В алгоритмах, где последовательно выделяются два тренда, для прогноза «Днепр» нужно сначала выделить гармоническую составляющую, а потом — полиномиальную, а для прогноза «Англия» —

наоборот. Здесь также необходимо помнить о возможной опасности жесткого единственного решения. Второй выделяемый тренд нужно припасовывать к нескольким лучшим трендам первого уровня ($F > 1$), а не к одному тренду $F = 1$. Точность комбинации трендов оценивается по их сумме, а не по точности каждого слагаемого.

Полученные результаты сведены в табл. 8.

Прогноз по многим переменным. Уравнение регрессии в этом случае имеет вид

$$\varphi = f(t) + f(x_1 x_2 \dots x_m),$$

где $f(t)$ — лучший (оптимальный) тренд; $f(x_1 x_2 \dots x_m)$ — функция других аргументов, кроме времени (остаток).

Функция многих переменных остатков определяется на основе принципа самоорганизации при $F > 1$ по ряду алгоритмов МГУА (см. табл. 8). Соответствующие программы приведены в работах [15, 17, 18 и 48].

Для прогнозирования остатков можно использовать как полиномы, так и гармонические функции. Однако аппарат гармонических функций для нескольких аргументов, хотя и существует, но не удобен. Поэтому для прогнозирования остатка будем пользоваться только полиномами.

ОДНОКРАТНЫЙ ПРОГНОЗ СРЕДНЕГОДОВОГО РАСХОДА ВОДЫ В р. ДНЕПР НА БЛИЖАЙШЕЕ ДЕСЯТИЛЕТИЕ

С учетом использования данных о среднегодовом расходе р. Днепр на 1964 г. включительно был найден оптимальный (среди заданного множества возможностей) алгоритм для однократного среднесрочного прогнозирования. В соответствии с алгоритмами четвертого (и седьмого) способов регуляризации, период отбора и его начальная фаза были выбраны так, чтобы получить наибольшую точность прогноза при времени упреждения прогноза семь лет ($T_y = 7$ лет). Поэтому, как показано в табл. 9, основной целью прогноза явился прогноз на 1977 г. Для другого времени упреждения по-видимому можно подобрать (по критерию $\Delta(2)$) другое значение периода и фазы отбора точек в проверочную последовательность. Найденный алгоритм был применен для однократного прогнозирования расхода воды р. Днепр в 1977 г. с использованием данных по 1970 г. включительно. В то же время (с меньшей достоверностью) получен прогноз и для всего десятилетия на 1971—1981 гг.

Выделение гармонического тренда оптимальной сложности при $T_y = 7$ лет и четвертом способе регуляризации дало не один, а два почти одинаковых по критерию регулярности гармонических тренда: $\Delta(1) = 1,31\%$ и $\Delta(1) = 1,39\%$ (см. табл. 9). Обратим внимание

на то, что оба тренда почти совпадают, что показывает устойчивость алгоритма.

Уравнение тренда, дающего $\Delta(1) = 1,31\%$:

$$d(t) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{10} \quad (r = 10),$$

где

$$d_1 = -21,5755 + 56,3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 131,52 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ (T_1 = 12,778 \text{ лет});$$

$$d_2 = 1,496 - 86,119 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 86,92 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ (T_2 = 5,824);$$

$$d_3 = -3,366 - 24,766 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 24,76 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ (T_3 = 28,168);$$

$$d_4 = 3,695 + 44,88 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 85,66 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (T_4 = 7,762);$$

$$d_5 = 0,44387 - 144,06 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 72,085 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ (T_5 = 9,244);$$

$$d_6 = 0,8593 - 48,54 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 1,687 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (T_6 = 4,798);$$

$$d_7 = 0,2228 - 77,98 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 14,789 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (T_7 = 9,7);$$

$$d_8 = -0,4238 + 15,23 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 12,87 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (T_8 = 13,12);$$

$$d_9 = 0,08824 + 77,24 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 61,71 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (T_9 = 4,342);$$

$$d_{10} = -0,161138 + 32,4929 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 17,7 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \\ (T_{10} = 4,684).$$

Выделение на машине БЭСМ-6 указанных 10 синусоид, входящих в состав тренда по программе [49], занимает около 3-х часов счета.

Уравнение остатка:

$$d = d_1(t) + d_2(x_2 x_4 x_8 x_7 x_3 x_{10} x_{15} x_{17} x_{19}),$$

где $x_7 = n_9$, $x_4 = d_5$, $x_{10} = n_{16}$, $x_{11} = n_{17}$, $x_8 = n_{10}$, $x_2 = d_9$, $x_6 = d_{20}$, $x_{15} = s_8$, $x_{19} = s_{20}$, $x_{17} = s_{18}$.

Функция $d_2 = w$ рассматривается так:

$$y_7 = a_0 + a_1 x_7 + a_2 x_4 + a_3 x_7 x_4 + a_4 x_1^2 + a_5 x_4^2,$$

где $a_0 = 0,22454$, $a_1 = -0,2365$, $a_2 = -2,3613$, $a_3 = 2,6603$, $a_4 = -1,4202$, $a_5 = 6,3213$;

$$y_{10} = a_0 + a_1x_{10} + a_2x_{11} + a_3x_{10}x_{11} + a_4x_{10}^2 + a_5x_{11}^2,$$

где $a_0 = -0,3565$, $a_1 = -5,09769$, $a_2 = 0,4659$, $a_3 = 7,5937$, $a_4 = 21,1948$, $a_5 = -0,091$;

$$y_8 = a_0 + a_1x_8 + a_2x_2 + a_3x_8x_2 + a_4x_8^2 + a_5x_2^2,$$

где $a_0 = 0,3553$, $a_1 = -0,0346$, $a_2 = -1,0316$, $a_3 = 4,0385$, $a_4 = -1,7154$, $a_5 = -0,4798$;

$$y_6 = a_0 + a_1x_6 + a_2x_{10} + a_3x_6x_{10} + a_4x_6^2 + a_5x_{10}^2,$$

где $a_0 = -0,3188$, $a_1 = -0,3338$, $a_2 = -5,2456$, $a_3 = 3,6087$, $a_4 = 0,08308$, $a_5 = 22,1001$;

$$y_{11} = a_0 + a_1x_{11} + a_2x_{15} + a_3x_{11}x_{15} + a_4x_{11}^2 + a_5x_{15}^2,$$

где $a_0 = 0,3008$, $a_1 = -0,9651$, $a_2 = -0,1354$, $a_3 = 0,7232$, $a_4 = 0,0036$, $a_5 = -0,03568$;

$$y_{19} = a_0 + a_1x_{19} + a_2x_{17} + a_3x_{19}x_{17} + a_4x_{19}^2 + a_5x_{17}^2,$$

где $a_0 = 0,1307$, $a_1 = -0,7713$, $a_2 = 0,5176$, $a_3 = -0,4248$, $a_4 = 0,5141$, $a_5 = -0,1244$;

$$z_7 = a_0 + a_1y_7 + a_2y_{10} + a_3y_7y_{10} + a_4y_7^2 + a_5y_{10}^2,$$

где $a_0 = -0,24662$, $a_1 = -0,274364$, $a_2 = -0,57559$, $a_3 = 1,5634$, $a_4 = 0,7806$, $a_5 = 0,39012$;

$$z_8 = a_0 + a_1y_8 + a_2y_6 + a_3y_8y_6 + a_4y_8^2 + a_5y_6^2,$$

где $a_0 = -0,42436$, $a_1 = -0,79693$, $a_2 = -0,25451$, $a_3 = 0,86137$, $a_4 = 0,78007$, $a_5 = -0,60226$;

$$z_{11} = a_0 + a_1y_{11} + a_2y_{10} + a_3y_{11}y_{10} + a_4y_{11}^2 + a_5y_{10}^2,$$

где $a_0 = -0,26729$, $a_1 = -0,90019$, $a_2 = 0,093439$, $a_3 = 0,8426$, $a_4 = 0,67023$, $a_5 = -0,8561$;

$$z_{10} = a_0 + a_1y_{10} + a_2y_{19} + a_3y_{10}y_{19} + a_4y_{10}^2 + a_5y_{19}^2,$$

где $a_0 = -0,27512$, $a_1 = -0,5719$, $a_2 = -0,1252$, $a_3 = 1,3483$, $a_4 = 0,39584$, $a_5 = 0,63381$;

$$v_7 = a_0 + a_1z_7 + a_2z_8 + a_3z_7z_8 + a_4z_7^2 + a_5z_8^2,$$

где $a_0 = -0,02161$, $a_1 = -0,07983$, $a_2 = -0,04362$, $a_3 = -0,108649$, $a_4 = 0,13343$, $a_5 = 0,068094$;

$$v_{11} = a_0 + a_1z_{11} + a_2z_{10} + a_3z_{11}z_{10} + a_4z_{11}^2 + a_5z_{10}^2,$$

где $a_0 = 0,011128$, $a_1 = 0,08582$, $a_2 = -0,07489$, $a_3 = 0,089988$, $a_4 = 0,065406$, $a_5 = -0,079481$;

$$w = a_0 + a_1v_7 + a_2v_{11} + a_3v_7v_{11} + a_4v_7^2 + a_5v_{11}^2,$$

где $a_0 = -0,0041629$, $a_1 = -0,59105$, $a_2 = 0,702008$, $a_3 = -0,020166$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$.

Время вычисления остатка на машине БЭСМ-6 — около 20 мин.

Одна из целей данного прогноза — оценка однократного прогноза, данного в работе [64]. По этому прогнозу 1977 г. будет годом с катастрофически малым расходом воды в р. Днепр ($Q = 710 \text{ м}^3/\text{с}$, кривая 1 рис. 29). По прогнозу в 1977 г. воды будет достаточно ($1132 \text{ м}^3/\text{с}$). Более полное сравнение прогнозов (с учетом многократных прогнозов) дано в гл. III на стр. 151.

ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВЫБОРА НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНЫХ АРГУМЕНТОВ

Если имеется небольшая вычислительная машина, возникает задача уменьшения числа аргументов. Для этого можно использовать построение корреляционных функций и линейный регрессионный анализ. Кроме того, корреляционные функции, как уже указывалось, необходимы для оценки времени когерентности и степени предсказуемости процессов.

Известно, что автокорреляционная функция строится при помощи перемножения ординат случайного процесса и тех же ординат, взятых с постепенно увеличивающимся сдвигом во времени от 0 до T_L .

Авто- и взаимокорреляционные функции в прогнозе «Днепр» показаны на рис. 13, в прогнозе «Англия» — на рис. 18. Максимальное время сдвига следует выбирать по крайней мере в два-три раза больше времени упреждения прогноза (семь лет). Этот сдвиг был выбран равным 20-ти годам.

По виду корреляционных функций убеждаемся, что исследуемые процессы содержат небольшую, но устойчивую детерминированную составляющую (функции не убывают до нуля). Поэтому определить время когерентности в данной задаче прогнозирования нельзя. Эта задача является очень трудной, так как значения корреляций небольшие (около 0,2).

Для краткосрочного прогноза при $T_y = 1$ год можно рекомендовать 20 аргументов:

$$t, d_1, d_3, d_6, d_8, d_9, d_{13}, d_{15}, d_{17};$$

$$n_1, n_4, n_{10}, n_{13}, n_{16}, n_{19}, n_{20};$$

$$s_3, s_8, s_{14}, s_{18}.$$

Для среднесрочного прогноза при $T_y = 7$ лет — 13 аргументов:

$$t, d_8, d_9, d_{13}, d_{15}, d_{17};$$

$$n_{10}, n_{16}, n_{19}, n_{20};$$

$$s_8, s_{14}, s_{18}.$$

Здесь индексы указывают сдвиг в прошлое, с которым нужно взять данный аргумент. Например, d_8 — расход Днепра восемь лет тому назад, n_8 — расход Немана восемь лет тому назад, s_{10} — число Вольфа десять лет тому назад и т.п.

Выбор наиболее эффективных аргументов при помощи линейного регрессионного анализа. Аппарат парных корреляционных функций имеет следующие недостатки: во-первых, он линейный, во-вторых — дает только некоторые сечения корреляционного пространства. Более совершенным является аппарат множественной корреляции или линейного регрессионного анализа.

Составим уравнение регрессии:

$$d_0 = a_0 + a_1 d_1 + a_2 d_2 + \dots + a_{20} d_{20} + b_1 n_1 + b_2 n_2 + \dots + b_{20} n_{20} + c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots + c_{20} s_{20}.$$

Решая это уравнение по алгоритму МГУА с линейными полиномами [71], находим числовые значения коэффициентов — оценки веса каждого из аргументов. Большие по величине коэффициенты указывают следующий состав аргументов:

Для краткосрочного прогноза на 1 год (29 аргументов):

$$t, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{13}, d_{15}, d_{17}, d_{20}; \\ n_1, n_4, n_8, n_9, n_{10}, n_{13}, n_{16}, n_{17}, n_{18}, n_{19}, n_{20}; \\ s_3, s_4, s_8, s_{14}, s_{18}, s_{19}, s_{20}.$$

Для среднесрочного прогноза на 7 лет (20 аргументов):

$$t, d_8, d_9, d_{13}, d_{15}, d_{17}, d_{20}; \\ n_9, n_{10}, n_{13}, n_{16}, n_{17}, n_{18}, n_{19}, n_{20}; \\ s_8, s_{14}, s_{18}, s_{19}, s_{20}.$$

Оба способа выбора аргументов являются приближенными, основанными на линейном подходе, причем второй способ включает в себя результаты первого.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ *

Пусть процесс, подлежащий аппроксимации, представлен в виде суммы периодических функций:

$$f(t) = \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \sin \omega_m t + \beta_m \cos t) + \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(\omega t + \varphi_m),$$

* Раздел написан совместно с аспирантом Ю. В. Чукиным [43]. Математическое построение имеет много общего с доказательством известной теоремы В. А. Котельникова.

где

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j); \quad A_m = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2}; \\ \beta_m = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j) \cos \omega_m t_j; \quad \operatorname{tg} \varphi_m = \frac{\beta_m}{\alpha_m}; \\ \alpha_m = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j) \sin \omega_m t_j; \quad t_j = \frac{2\pi j}{N}.$$

Введем функцию отбора точек в первую проверочную последовательность в виде

$$r(t) = \sum_{i=1}^R \delta\left(t + t_2 - \frac{2\pi i}{\omega_2}\right),$$

где $t = \frac{2\pi}{\omega_2}$ — период отбора точек, $R = \frac{\omega_2 N}{2\pi}$, т. е. в проверочную последовательность попадают все точки с периодом t_0 , начиная с точки номер $\frac{N t_2}{2\pi}$.

Требуется определить некоторую оценку функции отбора точек с тем, чтобы найти оптимальное их разделение на обучающую и проверочную последовательности.

В качестве критерия оптимальности применим спектральную плотность процесса, поскольку ею определяется поведение процесса, а в некоторых случаях она является и достаточной характеристикой. Запишем конечную целевую функцию в виде

$$\Phi = [s(\omega_m) - \bar{s}(\omega_m)] \rightarrow \min,$$

где $\hat{s}(\omega_m) = \frac{1}{2} (\alpha_m^2 + \beta_m^2)$ — оценка спектральной плотности при $\omega = \omega_m$; $\bar{s}(\omega_m) = \frac{1}{2} (\alpha_m^2 + \beta_m^2)$ — оценка той же спектральной плотности при использовании алгоритма МГУА, т. е. той спектральной плотности, которая соответствует найденной по алгоритму МГУА функции:

$$\Phi = \frac{1}{2} [\alpha_m^2 - \bar{\alpha}_m^2 + \beta_m^2 - \bar{\beta}_m^2] \approx [\alpha_m (\alpha_m - \bar{\alpha}_m) + \beta_m (\beta_m - \bar{\beta}_m)]^2.$$

Оценка коэффициента

$$\bar{\alpha}_m = \gamma \alpha_m^0 + (1 - \gamma) \alpha_m^n,$$

где γ — величина, оценивающая роль обучающей последовательности в алгоритме МГУА ($0 < \gamma < 1$); α_m^0, α_m^n — оценки коэффициента α_m только по обучающей и проверочной последовательностям соответственно.

Коэффициенты α_m^n и α_m^o определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha_m^n &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f(t_j) \sin \omega_m t_j \left[\sum_{i=1}^k \sigma \left(t + t_2 - \frac{2\pi i}{\omega_2} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^R f \left(\frac{2\pi i}{\omega_2} - t_2 \right) \sin \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} - \varphi_r \right) \quad (\varphi_r = \omega_m t_r), \\ \alpha_m^o &= \alpha_m - \alpha_m^n.\end{aligned}$$

Коэффициенты β_m^n и β_m^o определяются аналогично:

$$\begin{aligned}\beta_m^n &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^R f \left(\frac{2\pi i}{\omega_r} - t_r \right) \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} - \varphi_r \right); \\ \beta_m^o &= \beta_m - \beta_m^n.\end{aligned}$$

Определим t_r и ω_r из условия $\frac{d\phi}{d\omega_r} = 0$:

$$\frac{d\phi}{d\omega_r} = 2(2j-1) \{V\bar{\phi}\} \left(\alpha_m \frac{d\alpha_m}{d\omega_r} + \beta_m \frac{d\beta_m^n}{d\omega_r} \right) = 0.$$

Если предположить, что $j = \frac{1}{2}$, то это означает, что обучающая и проверочная последовательности играют одну и ту же роль, что, разумеется, не так (это видно из самого алгоритма). Поэтому $j \neq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_m}{d\omega_2} &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^R \left[f' \left(\frac{2\pi i}{\omega_2} - t_2 \right) \sin \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} - \varphi_2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - f \left(\frac{2\pi i}{\omega_2} - t_2 \right) \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} - \varphi_2 \right) 2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} \right] = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^R \frac{2\pi i}{\omega_2} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} A_m \omega_m \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} + \varphi_m - \varphi_2 \right) \times \right. \\ &\quad \times \sin \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} - \varphi_2 \right) - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \omega_m \sin \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} + \varphi_m - \varphi_2 \right) \times \\ &\quad \times \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} - \varphi_2 \right) - \beta_0 \omega_m \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} - \varphi_2 \right) \Big] = \\ &= \sum_{i=1}^R \frac{4\pi i}{\omega_2} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} A_m \omega_m \sin \left(4\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} + \varphi_m - 2\varphi_2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_0 \omega_m \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_2} - \varphi_2 \right) \right].\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_m^n}{d\omega_r} &= \sum_{i=1}^R \frac{4\pi i}{\omega_r} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} A_m \omega_m \cos \left(4\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} + \varphi_m - 2\varphi_r \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_0 \omega_m \sin \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} - \varphi_r \right) \right].\end{aligned}$$

Вводя обозначение $\xi_m = \frac{A_m}{\beta_0}$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^R \frac{4\pi i}{\omega_r} \left\{ - \cos \varphi_m \left[\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \omega_m \sin \left(4\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} + \varphi_m - 2\varphi_r \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_m \cos \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} - \varphi_r \right) \right] + \sin \varphi_m \left[\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \omega_m \cos \left(4\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \varphi_m - 2\varphi_r \right) + \omega_m \sin \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} - \varphi_r \right) \right] \right\} = 0.\end{aligned}$$

В полученном выражении приравняем нулю каждое слагаемое. После преобразования получим

$$\begin{aligned}- \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \omega_m \sin \left(4\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} + 2\varphi_m - 2\varphi_r \right) - \omega_m \cos \times \\ \times \left(2\pi i \frac{\omega_m}{\omega_r} + \varphi_m - \varphi_2 \right) = 0 \quad (i = \overline{1, R}).\end{aligned}$$

В качестве приближенного решения уравнения используем решение, учитывающее только одну периодическую составляющую процесса ω_{m_0} с максимальной амплитудой A_{m_0} , т.е.

$$\begin{aligned}- \xi_{m_0} \sin \left(4\pi i \frac{\omega_{m_0}}{\omega_r} + 2\varphi_{m_0} - 2\varphi_r \right) + \cos \left(2\pi i \frac{\omega_{m_0}}{\omega_r} + \right. \\ \left. + \varphi_{m_0} - \varphi_r \right) = 0, \quad (i = \overline{1, R}).\end{aligned}$$

Для того чтобы удовлетворить решение для любого ξ_{m_0} ($0 \leq \xi_{m_0} \leq \infty$), необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned}\sin \left(4\pi i \frac{\omega_{m_0}}{\omega_r} + 2\varphi_{m_0} - 2\varphi_r \right) &= 0; \\ \cos \left(2\pi i \frac{\omega_{m_0}}{\omega_r} + \varphi_{m_0} - \varphi_r \right) &= 0.\end{aligned}$$

Решение этой системы:

$$2\pi i \frac{\omega_{m_0}}{\omega_r} + \varphi_{m_0} - \varphi_r = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_r = \varphi_{m_0} \pm \frac{\pi}{2} \quad (\omega_r = 2\omega_{m_0}).$$

Эти уравнения определяют собой начальную фазу и частоту отбора точек в проверочную последовательность при седьмом способе регуляризации.

Гипотеза, которую можно положить в основу теории целенаправленной регуляризации. Рассмотренный выше пример показал, что существует оптимальный (по критерию Δ (2)) период отбора точек, поступающих в проверочную последовательность. В примере он оказался равным трем интервалам: три точки идут в обучающую последовательность, а каждая четвертая — в проверочную (см. табл. 6).

Рассмотрим гипотезу, объясняющую существование такого периода, и наметим общий принцип его определения, исходя из характера прогнозируемого процесса.

Можно предположить, что для вывода уравнений временных трендов случайных процессов, имеющих явно выраженные колебательные составляющие, целесообразно применять периодический закон отбора точек в первую проверочную последовательность и рекомендовать в эту последовательность точки, отвечающие вершинам основной гармоник. При этом достигается минимум ошибки на второй проверочной (экзаменационной) последовательности.

В рассмотренном примере отмечалось две основные гармоник: первая — с периодом около двенадцати лет и вторая — с периодом около восьми лет. Именно поэтому минимум ошибки на экзаменационной последовательности получен при отборе каждой шестой или каждой четвертой точки в проверочную последовательность. Так как гармоника с периодом восемь лет имеет большую амплитуду, то и выбор каждой четвертой точки дает более эффективные результаты.

Отметим также, что результаты оптимизации шестого и седьмого способов регуляризации подтверждают друг друга. Действительно, при шестом способе рекомендуется выбирать период отбора точек в проверочную последовательность, равный половине времени когерентности автокорреляционной функции, что частично совпадает с рекомендацией полученной для седьмого способа (отличие в том, что точки берутся не по одной, а группами). Оптимальные частоты отбора точек в проверочную последовательность соответствуют нулям автокорреляционной функции случайного процесса (см. рис. 13).

Таким образом, найдены оптимальные способы регуляризации: для трендов — четвертый или седьмой, для остатков — третий. Однако при этом информация о производных (приращениях) аппроксимируемой функции не использовалась. Если учитывать такую информацию, можно еще больше повысить эффективность целена-

правленной регуляризации. Этому и служит восьмой способ регуляризации.

Выводы сравнения алгоритмов МГУА и способов регуляризации в задаче однократного прогноза. Верхние две строки табл. 8 позволяют сделать основной вывод: целенаправленная регуляризация эффективна только при выделении трендов (функций времени), причем достигаемое повышение точности весьма значительно. Наиболее эффективными являются четвертый и, следовательно, седьмой способы регуляризации.* Правые три столбца табл. 8 показывают, что возможности целенаправленной регуляризации при выводе остатка, являющиеся функцией многих переменных, весьма ограничены. Здесь можно применить только первый, второй и третий способы регуляризации, которые почти равноценны между собой. Практически при выводе остатка можно рекомендовать третий способ, так как он позволяет получить наименьшее число рядов селекции (более простые уравнения прогнозирования).

Наиболее перспективной является комбинированная целенаправленная регуляризация, при которой для выделения временного тренда применяется один способ регуляризации, а для выделения остатка (функции многих переменных) — другой.

При среднесрочных однократных прогнозах рекомендуются: для тренда четвертый или седьмой способы, для остатка — третий способ регуляризации. При краткосрочных прогнозах: для тренда — второй, для остатка — третий способ регуляризации. Результаты, полученные по этой рекомендации, показаны в табл. 8, а также на рис. 20. Сравнивая показатели точности прогнозов, легко убедиться, что точность прогнозов по одному тренду (по времени) при оптимальной регуляризации и точность прогнозов по алгоритмам МГУА с трендом нулевой степени (по многим аргументам) дают сравнимые между собой результаты. Комбинированная целенаправленная регуляризация (рис. 20, з) позволяет снизить ошибку приблизительно в два-три раза по сравнению с прогнозированием при тренде нулевой степени.

Интересным результатом является то, что те алгоритмы и способы регуляризации, которые оказались наиболее эффективными для прогноза «Англия», являются также наиболее эффективными и для прогноза «Днепр». По-видимому, рекомендации о применении способов регуляризации носят общий характер и применимы для самых различных по природе процессов.

Итак, можно ли прогнозировать случайные процессы по трендам? После того, как был определен оптимальный способ регуляризации, можно положительно ответить на этот вопрос. Если способ

* Седьмой способ является улучшенным четвертым (уточняет фазу периода отбора точек в проверочную последовательность).

целенаправленной регуляризации и критерий селекции выбраны правильно, то тренды верно подсказывают будущий ход процесса даже в случае, когда процесс неожиданно изменяет свой ход (как это имеет место в примере прогноза «Англия», показанном на рис. 20 в точке, отвечающей 1964 г.). При общей оценке возможности точного однократного прогноза по одному, лучшему, тренду или по сумме двух трендов необходимо иметь в виду существующее мнение о том, что только «они описывают поведение переменной в прошлом и могут прекратиться в любой момент времени» [8]. Это положение справедливо только при отсутствии целенаправленной регуляризации. Выбор способа регуляризации и критерия селекции позволяет резко повысить точность прогнозов по тренду и увеличить его время упреждения. Наиболее точный прогноз дает выделение трендов по критерию баланса переменных с учетом этапа адаптации коэффициентов до $n_{см}=0$. Дальнейшее повышение точности прогнозов можно получить при помощи учета информации по многим переменным (учет «остатка»).

Один из самых неожиданных результатов расчета средне- и долгосрочных прогнозов по алгоритмам МГУА состоит в том, что очень часто выделение только одного тренда оптимальной сложности обеспечивает уже достаточно точный для практики прогноз. Например, в прогнозе среднегодового стока р. Днепр, как и в прогнозе урожайности мелозиров на о. Байкал [76], добавление «остатка» не повысило существенно точности прогноза. Вычисление же только одного тренда (функции времени) обеспечило точный прогноз. Учет «остатков» повышает точность прогноза, если точность их уравнений достаточно высока (ошибка $\Delta(1)_{норм} < 0,05$). Если остатки не точны, то лучше прогнозировать процесс по одним трендам.

Из этих фактов можно сделать важный вывод о значительной степени детерминизма окружающего нас мира, во всяком случае — указанных выше процессов. Лаплас, утверждая, что все вокруг нас можно рассчитать, был почти прав. Так, теория самоорганизации увеличивает область, где можно приложить детерминистические законы (в форме уравнений регрессии). Как известно, противоположности сходятся.

В следующей главе будет показано, что однократный и многократный прогнозы в задачах среднесрочного и долгосрочного прогнозов дают почти одинаковые по точности результаты. Почему же не сказываются врожденные недостатки однократного прогноза (старение аргументов и др.), о которых говорилось выше? Ожидалось, что однократный прогноз значительно уступает по точности многократному. Ответ прост: в том и другом случае главную часть прогноза составляет временной тренд. Если сначала выделить системную составляющую, а потом тренд, то точного прогноза не получится. Принятая последовательность выделения составляющих оптимальна. Природа процессов такова, что роль системной со-

ставляющей (остатка) — мала, а роль функции времени — велика. Этому учит нас вычислительная машина, которой предоставлена достаточная свобода выбора модели.

Глава III

СИСТЕМНЫЙ МНОГОКРАТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ДОЛГОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ

Существует некоторое минимальное число характеристических переменных сложной системы, при котором оценки коэффициентов уравнений регрессии могут быть еще несмещенными, т. е. не зависящими от выбора множества узлов интерполяции. Системный прогноз составляется для такого (или большего) числа переменных, прогнозируемых одновременно. Состав этих переменных можно выбирать довольно произвольно: требуется только, чтобы они не были коллинеарны между собой, т. е. удовлетворяли «правилу больших углов» [43].

Уравнения регрессии могут быть получены по МГУА как для абсолютных значений переменных (в виде алгебраических уравнений), так и для их производных по времени или приращений (в виде так называемых дифференциальных уравнений регрессии). Последние, при удовлетворении критерию несмещенности, являются описанием физической модели детерминированной части процесса (рассматривается в следующей главе).

Многократный дифференциальный системный прогноз получается в результате одновременного пошагового интегрирования дифференциальных уравнений регрессии для всех переменных при числе уравнений не менее указанного минимума.

Обычно точность прогнозирования существенно повышается, если среди аргументов переменных или их приращений учитывается время t . В случаях, когда учет времени не требуется, его из числа аргументов должен исключить сам алгоритм МГУА, так как он (при отсутствии «протекции» переменным) селекционирует самые эффективные аргументы. На примере моделирования экономики Англии показано, что выделения отдельных временных трендов можно избежать, если включить время как независимый аргумент во все дифференциальные уравнения регрессии. Такие модели являются самыми точными.

В результате рассмотрения долгосрочных прогнозов оказалось, что для них следует применять линейные дифференциальные уравнения регрессии с запаздывающими аргументами, так как такие уравнения менее чувствительны к накоплению вычислительных ошибок.

Более точные, но менее устойчивые нелинейные дифференциальные уравнения следует применять для краткосрочных прогнозов.

Примеры прогнозирования (часть из которых приводится ниже) показывают, что учет системы (остатка) только незначительно повышает точность прогнозов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ «СИСТЕМА»

Большое внимание должно быть уделено определению границ «системы».

Все процессы в мире в какой-то степени взаимосвязаны и потому, говоря о «системе», условно выделяют некоторую группу наиболее сильно связанных между собой обратными и прямыми связями элементов. При этом мысленно разрывают выходные связи данной группы элементов во внешний мир. Обратная реакция внешнего мира на систему обычно не учитывается.

Подобный подход широко применяется в теории автоматического регулирования. Например, в системе регулирования напряжения генератора на входе учитывается скорость вращения и ток возбуждения, а на выходе нагрузка заменяется некоторым сопротивлением. Ни турбина, вращающая генератор, ни паровой котел, дающий пар в турбину, а также сеть нагрузки генератора в систему регулирования уже не входят. Ясно, что в выборе границ системы (что в нее входит, а что не входит) имеется некоторая условность.

Окружающий мир можно представить себе как бесконечную сеть взаимосвязанных компонентов с сосредоточенными или с распределенными параметрами. Связи компонентов могут быть самыми различными по своей физической природе: потоки вещества, энергии, информации или денежных средств и др.

Систему можно определить как часть этой бесконечной всемирной сети, для которой с точностью, достаточной для решения данной задачи, можно пренебречь ее выходными связями с остальным миром. Такое пренебрежение связями иногда вовсе не вызывает никакой ошибки. Например, в случае, когда выходные связи системы с остальными компонентами обладают детектирующими свойствами одностороннего действия, система влияет на остальной мир, а он, по выходам, на нее не влияет.

На рис. 21 приведена схема экономической системы Англии [86]. Здесь показаны три входа μ_1 , μ_2 , μ_3^* и два выхода φ_1 и φ_2 . Остальные связи системы — промежуточные, внутренние. Если выходные связи детектирующие, то рассматриваемая система будет автоном-

* Особенность данных регулирующих воздействий состоит в том, что они подобны действию вентилей в гидравлической системе. Вентили закрываются или открываются до тех пор, пока величины μ_1 , μ_2 и μ_3 не примут требуемые значения.

ной, изолированной от остального мира. В действительности в экономической системе это не так, следовательно, данную структуру можно только условно назвать полной схемой.

Второй пример приведен из области автоматического регулирования. Систему стабилизации напряжения генератора электрического тока обычно представляют в виде двух элементов: генератора (объекта регулирования) и регулятора, действующего на цепь возбуждения.

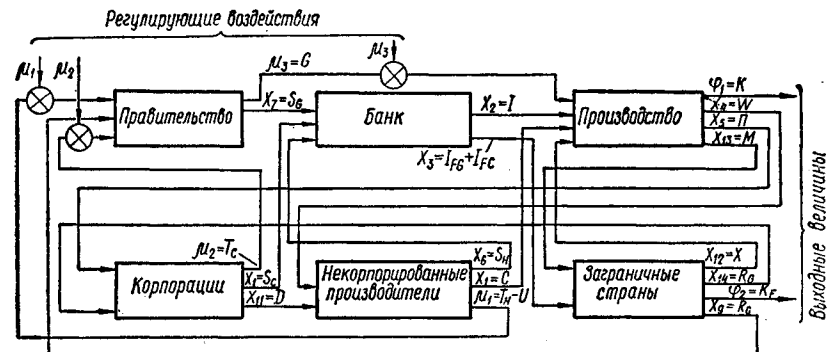


Рис. 21. Схема экономической системы Англии (по П. Парксу и Ф. Пиатту).

Выходная величина — напряжение генератора. Для генератора постоянного тока такая система действительно удовлетворит данному выше определению понятия системы; но для генератора переменного тока в систему нужно включить и нагрузку генератора, так как характер нагрузки (индуктивный или емкостный) существенно влияет на ход процессов регулирования напряжения генератора.

В каждом конкретном случае нужно внимательно выбрать границу того, что входит и что не входит в систему. Число внутренних промежуточных переменных можно выбирать произвольно, в зависимости от требуемой детализации моделей системы. Вопрос о выборе границ системы должен решаться прагматически: если модель предназначена для прогнозирования, то пригодны те границы, которые обеспечивают достаточную точность; если модель предназначена для управления, то состав элементов системы нужно выбирать, исходя из качеств управления. Вопрос решается сравнением вариантов. Выбрав границы данной системы, необходимо еще решить, сколько и какие именно переменные достаточно точно ее характеризуют. А так как в действительности все системы являются системами с распределенными параметрами, то нужно также выбрать точки, в которых будто бы они сосредоточены, т. е. выбрать порядок дифференциального уравнения системы.

Что касается числа переменных, то его можно изменить почти произвольно; оно определяется желаемой степенью детализации математической модели системы. Переменные, прогнозируемые с большой ошибкой (больше 50 %), лучше из системы исключить.

ПОЧЕМУ СЛОЖНАЯ ЗАДАЧА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЧАСТО ОКАЗЫВАЕТСЯ ДОВОЛЬНО ПРОСТОЙ

При синтезе моделей по методам самоорганизации (например, по МГУА) сложная система, имеющая сотни взаимосвязанных переменных, может быть описана сравнительно просто при помощи использования только небольшого числа переменных.

Для того чтобы модель была точной, она должна содержать число переменных, равное (или большее) разности полного числа переменных, входящих в характеристический вектор, и числа существующих в системе связей:

$$m \geq M - f^*,$$

где m — число переменных, используемых в модели $m \in M$; M — размерность полного характеристического вектора системы; f — число обратных связей с достаточно большим коэффициентом усиления, существующих в системе $f < M$.

Лучшим способом определения состава переменных, которые нужно оставить в модели, является перебор — сравнение ряда вариантов при использовании первого внешнего дополнения (например, точности на проверочной последовательности) в качестве критерия. Если критерий селекции получается выше, то это означает, что состав аргументов лучше. В определенных условиях с помощью корреляционного и факторного анализа можно уменьшить объем вычислений вариантов.

Модели синтезируются для прогноза или для управления. Чтобы получить уравнение для автоматического управления, необходимо среди аргументов оставить регулирующие воздействия, независимо от того, ведет ли это к некоторому снижению точности.

Для систем, где действует эргодический закон (среднее по множеству равно среднему по времени), существенное облегчение задачи выбора числа переменных дают следующие теоремы.

Теорема 8. Для того чтобы получить несмещенные оценки выходной величины φ , в разомкнутой системе нужно учитывать все воздействующие на нее входные переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$:

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

* Величина m имеет общее основание с величинами F (свобода выбора решений) и B (базис проектирования векторов). Минимальное значение этих величин можно установить при помощи ряда проб. Если увеличение m , F и B не вызывает улучшения модели, то их значения достаточны.

Отсутствие учета любой характеристической переменной (или составляющей характеристического вектора) ведет к смещению оценок.

Доказательство теоремы приведено во многих книгах по прикладной статистике, например в работе [21].

Теорема 9. В системе с неголономными обратными связями (т. е. связями, осуществляемыми через интеграторы) для получения несмещенной оценки выходной величины φ нужно учитывать всего $m \geq M - f$ входных переменных, где f — число неголономных связей.

Докажем теорему для $M = 3$ и $m = 1$. Такое доказательство может быть распространено на любое число переменных.

Уравнения динамики элементов системы (записанные в отклонениях от среднего значения) можно выразить так (рис. 22, а):

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_3);$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2).$$

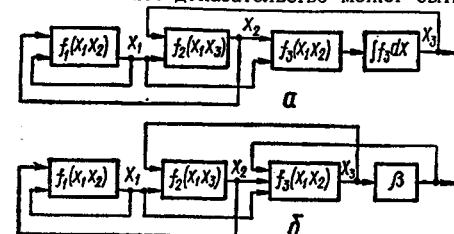


Рис. 22. Схемы систем:

Исключая переменную $x_3 = \int f_3(x_1, x_2) dt$, получим:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_2, \int f_3(x_1, x_2) dt);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \int f_3(x_1, x_2) dt).$$

Так как уравнения составлены для отклонений переменных от среднего, принятого за начало отсчета (нуль), то при увеличении числа точек измерения интегралы в этих уравнениях стремятся к нулю, а оценки переменных x_1 и x_2 становятся несмещенными, определяемыми выражениями:

$$x_1 = f(x_2);$$

$$x_2 = f(x_1).$$

Эти выражения описывают систему с двумя переменными, хотя исходная система содержала три переменные. Теорема доказана.

Теорема 10. В системе с более простыми жесткими (алгебраическими) обратными связями указанное в теореме 9 правило действует только для элементов, охваченных обратными связями, коэффициенты усиления которых стремятся к бесконечности. Для доказательства рассмотрим систему (рис. 22, б):

$$\dot{x}_1 = f_1(x_2, x_3);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_3);$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2) \frac{k}{(1 + \beta k)}.$$

Здесь третье уравнение представляет собой уравнение нелинейного статического звена, охваченного обратной связью с коэффициентом усиления β .

Оценки

$$x_1 = f_1\left(x_2, \frac{k f_3(x_1, x_2)}{1 + \beta k}\right);$$

$$x_2 = f_2\left(x_1, \frac{k f_3(x_1, x_2)}{1 + \beta k}\right).$$

при увеличении $\beta \rightarrow \infty$ стремятся к оценкам системы с двумя переменными

$$x_1 = f_1(x_2);$$

$$x_2 = f_2(x_1),$$

что и требовалось доказать.

Общий вывод. Условие $m \geq M - f$ действительно, если под f понимается общее число обратных связей (как связей через интеграторы, так и связей с достаточно большими коэффициентами усиления).

Укажем на имеющуюся здесь аналогию с исключением промежуточных переменных в алгебре. В алгебре известно правило: система из M алгебраических уравнений, содержащих f независимых переменных, может быть преобразована исключением промежуточных переменных к системе, содержащей всего $m = M - f$ уравнений. При этом исключать можно любые переменные (если уравнения независимые). Не трудно заметить полную аналогию приведенных выше теорем и этого известного алгебраического правила.

Специалисты по автоматическому регулированию несомненно сразу узнают в приведенных выше теоремах условия астатического регулирования. Изотропные (интегральные) обратные связи и обратные связи с очень большим коэффициентом усиления сводят установившуюся ошибку по соответствующим переменным к нулю. Эти переменные в статическом режиме не влияют на выход системы, поэтому их можно не учитывать в уравнениях статики.

Необходимые условия точного моделирования сложных систем. На основании изложенного выше можно сформулировать следующие необходимые условия точности моделей сложных систем:

1. Границы системы должны быть выбраны так, чтобы можно было оборвать только не очень влиятельные связи системы с внешним миром (средой). Важно по возможности учесть все влияния среды на систему.

2. Внутри системы действует некоторое (неизвестное) число переменных M при наличии f обратных связей. Для точного моделирования достаточно использовать любые $m \geq M - f$ переменные и располагать экспериментальными данными только для этого (небольшого) числа. При этом можно получить модели для каждого набора переменных, хотя все они выражают один и тот же закон. Варианты моделей отличаются тем, какие переменные войдут в число m .

3. Выбранные переменные не должны повторять друг друга (условие неколлинеарности). В пространстве параметров характеристики переменных должны образовывать всюду значительные углы («правило больших углов» [43]).

4. Плохо прогнозируемые переменные следует из модели исключить.

ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМНОГО МНОГОКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОГНОЗА

Прогноз называется системным, если одновременно прогнозируются не менее m характеристических переменных системы. Для упрощения системного прогноза нужно по возможности исключить

из имеющихся уравнений регрессии все промежуточные переменные. Оставшиеся переменные прогнозируются одновременно, шаг за шагом. При этом устраняется один из основных недостатков однократного прогноза — аргументы уравнений прогнозирования «не стареют» (носят последние по времени отсчета индексы).

Обычно уравнения регрессии связывают между собой переменные, характеризующие данный процесс, и имеют форму алгебраических уравнений. По одним и тем же исходным данным легко найти приращения переменных в каждой точке и, следовательно, получить дифференциальные уравнения регрессии*. Кроме того, можно просуммировать значения каждой переменной и получить интегральные уравнения регрессии.

Многократный прогноз можно вести как на основе алгебраических, так и на основе дифференциальных или интегральных уравнений регрессии.

Дифференциальный прогноз имеет важное преимущество: дифференциальные уравнения регрессии могут быть получены в какое-то время на данном объекте, а применены в другое время и на другом объекте. Например, второй закон Ньютона, имеющий дифференциальную форму, действителен всегда и для любых объектов. Интегральные алгебраические уравнения связаны со спецификой объекта через постоянные интегрирования.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ СИСТЕМНОГО МНОГОКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОГНОЗА

Рассмотрим способ качественного анализа точности системного многократного дифференциального прогноза, пользуясь, для краткости, самым простым дифференциальным уравнением регрессии (получаемым по МГУА) с одним аргументом x :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = f_1(x),$$

где $\Delta t = 1$; x — прогнозируемая переменная.

Последовательность дальнейших рассуждений можно повторить и для любого числа аргументов. Реальный объект описывается уравнением (которое не известно)

$$\frac{\Delta x^*}{\Delta t} = f_2(x).$$

* Все рассматриваемые уравнения регрессии являются конечно-разностными. Дифференциальными уравнениями регрессии условимся называть уравнения, которые при $\Delta t \rightarrow dt$ переходят в обычные дифференциальные уравнения первого порядка в нормальной форме Коши.

Ошибка уравнения регрессии $\Delta^2(I) = (\Delta x - \Delta x^*)^2$. Полином выбирается по МГУА так, чтобы эта ошибка была минимальной на первой проверочной последовательности данных.

Пример влияния неточности дифференциального уравнения регрессии на ошибку прогноза Δx показан на рис. 23. Рассмотрим на рисунке три области значений переменной x . В области, где $\Delta x^* = \Delta x$ (область 2), прогноз сохраняет свою точность независимо от числа шагов. Накопления ошибки здесь нет.

В области 3, где $\Delta x^* > \Delta x$, прогнозируемые значения переменной x уменьшаются со временем по сравнению с действительными значениями x^* . Действительно, на первом шаге последовательной процедуры прогноза

$$x_1 = x_0 + \Delta x_1;$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}_1.$$

Отсюда $\dot{x}_1 > \dot{x}$, так как $\Delta x_1 > \Delta x^*$.

На втором шаге ошибка усилится:

$$x_2 = x_1 + \Delta x_2.$$

В действительности

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_2,$$

$\dot{x}_2 \gg \dot{x}_1$ и т. д.

Неравенство $\dot{x}_k > \dot{x}_k$ усиливается с каждым шагом (при $k \rightarrow \infty$), причем тем быстрее, чем больше отличаются характеристики $f_1(x)$

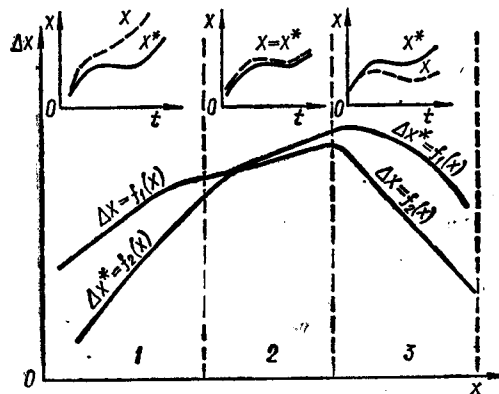


Рис. 23. Характер влияния неточности дифференциального уравнения регрессии на ошибку прогноза:

x^* — кривая действительного процесса; x — кривая прогноза; 1, 2, 3 — области, где соответственно прогноз завышен, точный и занижен.

и $f_2(x)$ в области данных значений x . Прогноз идет с прогрессивным преуменьшением прогнозируемой величины.

В области 1 значений x , где $\Delta x^* < \Delta x$, происходит обратный процесс. Прогноз идет с завышением прогнозируемой величины (область 1).

Точность прогноза не зависит от числа шагов упреждения прогноза при выполнении двух условий:

- 1) когда дифференциальное уравнение регрессии достаточно точное;
- 2) когда амплитуды значений переменных распределены так, что преуменьшение на части шагов компенсируется завышением на других шагах. Уравнения регрессии, получаемые по критерию несмещенности, в какой-то мере обеспечивают такую компенсацию.

Если выполнено хотя бы одно из указанных выше двух условий сохранения точности прогноза, накапливается только вычислитель-

ная ошибка, которая при использовании современных машин невелика. Это обеспечивает возможность прогнозирования при большом времени упреждения, измеряемом десятками лет.

Физически это можно пояснить так: движение детерминированных систем, например планет, может быть точно рассчитано на тысячи лет вперед. Самоорганизация моделей является новым аппаратом, позволяющим выделить детерминированную часть процесса — линию регрессии движения системы, обладающую тем же свойством.

Если объект прогнозирования не является автономным и среди аргументов имеются внешние воздействия, то значения последних приходится прогнозировать (или рассчитывать) отдельно методами однократного прогноза, рассмотренными в гл. 2.

СИНТЕЗ ОСТАТКОВ ПО ТРЕМ ВНЕШНИМ ДОПОЛНЕНИЯМ

При использовании для целей прогноза алгебраических или интегральных уравнений проблемы неустойчивости обычно не возникает. В отличие от этого многошаговый прогноз по дифференциальным уравнениям регрессии представляет собой неустойчивую вычислительную процедуру. Достаточно хотя бы немного отклониться от указанных выше двух условий сохранения точности, как прогноз при увеличении времени упреждения либо уходит в бесконечность, либо сходится к нулю или к тренду. Только при абсолютно точном выполнении условий прогноз остается точным при сколь угодно большом времени упреждения, что практически невозможно.

Напомним, что ранее при выводе алгебраических уравнений прогнозирования (трендов) преследовались две цели: получить минимум ошибки Δ (об) на обучающей последовательности и наиболее регулярные уравнения (минимум ошибки Δ (1) на первой проверочной последовательности). Для достижения этого использовались две «ручки настройки»: выбор значений коэффициентов уравнений регрессии a_i и выбор числа рядов селекции r . Вычислительный алгоритм был управляемым, так как для удовлетворения двух условий имелось два регулирующих воздействия.

При прогнозе по дифференциальным уравнениям регрессии возникает третья цель: устойчивость прогноза на протяжении заданного интервала упреждения T_y . Устойчивость прогноза можно оценить по величине среднеквадратичной ошибки Δ (2) на второй проверочной (экзаменационной) последовательности. Для повышения надежности оценки ее можно подсчитывать не на одном последнем интервале, а на нескольких интервалах упреждения T_y с последующим усреднением результатов. Три условия Δ (об) $\rightarrow \min$, Δ (1) $\rightarrow \min$ и Δ (2) $\rightarrow \min$ требуют наличия трех регулирующих воздействий.

Таблица 10

Пример постепенного усложнения полинома при двух аргументах x_1 и x_2 .

Члены полного степенного полинома Колмогорова — Габора				
x_1	x_2	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2
$y_1 = a_0 + a_1 x_1$	$y_2 = a_0 + a_1 x_2$	$y_4 = a_0 + a_1 x_1 x_2$	$y_8 = a_0 + a_1 x_1^2$	$y_{16} = a_0 + a_1 x_2^2$
	$y_3 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$	$y_5 = a_0 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1$	$y_9 = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1$	$y_{17} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_2$
		$y_6 = a_0 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2$	$y_{10} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2$	$y_{18} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1$
		$y_7 = a_0 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1 + a_3 x_2$	$y_{11} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 x_2$	$y_{19} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_2$
			$y_{12} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2$	$y_{20} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1 + a_3 x_2$
			$y_{13} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1$	$y_{21} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1 x_2$
			$y_{14} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2$	$y_{22} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1$
			$y_{15} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1 + a_4 x_2$	$y_{23} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2$
				$y_{24} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1 + a_4 x_2$
				$y_{25} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1$
				$y_{26} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2$
				$y_{27} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 + a_4 x_2$

Продолжение табл. 10

Члены полного степенного полинома Колмогорова — Габора				
x_1	x_2	$x_1 x_2$	x_1^2	x_2^2
				$y_{28} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2$
				$y_{29} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1$
				$y_{30} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2$
				$y_{31} = a_0 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1 + a_5 x_2$

К сожалению, все «ручки управления» вычислительного алгоритма синтеза уравнений прогноза уже заняты, хотя ни от одной из указанных выше целей отказаться нельзя. Единственная возможность решения задачи управляемости алгоритма — дополнительный выбор сложности частных описаний. Тогда три указанных условия можно удовлетворить при помощи перебора ряда вариантов следующих трех изменяемых параметров: коэффициентов a_i , числа рядов селекции r (сложности полного описания S), числа и состава членов (сложности) частных описаний.

Наиболее плавное наращивание сложности (степени и количества аргументов) частных и полных описаний можно получить по комбинаторному алгоритму МГУА с последовательным введением аргументов. Согласно табл. 10, 11 [44] постепенное усложнение правой части частных описаний второй степени может иметь 31 ступень:

1-я ступень: $y = z_1 + z_2$;

2-я » $y = z_1 + z_3$;

3-я » $y = z_2 + z_3$;

4-я » $y = z_1 + z_2 + z_3$;

5-я » $y = z_1 + z_4$;

.....

31-я ступень: $y = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6$,

где $z_1 = a_0$; $z_2 = a_1x_2$; $z_3 = a_2x_i^2$; $z_4 = a_3x_j$; $z_5 = a_4x_ix_j$; $z_6 = a_5x_j^2$. Постепенно наращивая сложность частных описаний в алгоритмах МГУА и увеличивая число рядов селекции, можно решить задачу компромиссного выбора оптимального полного описания.

При этом почти всегда клетки таблицы, в которых достигаются минимумы ошибок $\Delta(1)$, $\Delta(2)$ и $\Delta^2(2)$, совпадают, поэтому необхо-

Таблица 11

Пример постепенного усложнения полинома при одном аргументе t

Члены полного степенного полинома Колмогорова — Габора

t	t^2	t^3	t^4	t^5
$y_1 = a_0 + a_1t$	$y_2 = a_0 + a_1t^2$ $y_3 = a_0 + a_1t^2 + a_2t$	$y_4 = a_0 + a_1t^3$ $y_5 = a_0 + a_1t^3 + a_2t$ $y_6 = a_0 + a_1t^3 + a_2t^2$ $y_7 = a_0 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t$	$y_8 = a_0 + a_1t^4$ $y_9 = a_0 + a_1t^4 + a_2t$ $y_{10} = a_0 + a_1t^4 + a_2t^2$ $y_{11} = a_0 + a_1t^4 + a_2t^2 + a_3t$ $y_{12} = a_0 + a_1t^4 + a_2t^3$ $y_{13} = a_0 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t$ $y_{14} = a_0 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2$ $y_{15} = a_0 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t$	$y_{16} = a_0 + a_1t^5$ $y_{17} = a_0 + a_1t^5 + a_2t$ $y_{18} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^2$ $y_{19} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^2 + a_3t$ $y_{20} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^3$ $y_{21} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^3 + a_3t$ $y_{22} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^3 + a_3t^2$ $y_{23} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t$ $y_{24} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4$ $y_{25} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t$ $y_{26} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t^2$ $y_{27} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t^2 + a_4t$ $y_{28} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t^3$ $y_{29} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t^3 + a_4t$ $y_{30} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t^3 + a_4t^2$ $y_{31} = a_0 + a_1t^5 + a_2t^4 + a_3t^3 + a_4t^2 + a_5t$

димось компромиссного решения часто отпадает (см. табл. 12). Программа, изложенная в работе [17], осуществляет синтез остатка для дифференциальных уравнений регрессии вида

$$\left[\frac{\Delta v_i}{\Delta t} - \Delta v_i(t) \right] = f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

где $\Delta v_i(t)$ — тренд отклонений.

При решении задачи должен быть задан интервал упреждения прогноза T_y . Чтобы получить минимум рядов селекции, все имеющиеся точки, как в обычных алгоритмах МГУА, ранжируются по дисперсии и делятся на две части: точки с большей дисперсией идут в обучающую последовательность, а с меньшей — в первую проверочную.

Особенность программы [17] состоит в том, что для оценки точности прогноза в ней используются все точки таблицы исходных экспериментальных данных. Приращения не зависят от абсолютных значений переменных. Так как прогноз вычисляется через приращения, то не обязательно, чтобы точки экзаменационной последовательности, на которых определяется ошибка прогноза $\Delta(2)$, были новыми, т. е. не входили в состав обучающей или первой проверочной последовательностей.

Как уже пояснялось, при дифференциальном прогнозе, в отличие от однократного, с каждого узла интерполяции снимается совсем другая информация — информация об отклонениях, что является одним из достоинств этого прогноза, так как повышает использование точек короткой выборки (последовательности) данных.

Синтез остатка выполняется для различных частных описаний, сложность которых постепенно нарастает. Из них выбираются частные описания такого вида, при которых ошибка прогноза была бы наименьшей для заданного времени упреждения прогноза. В результате получается окончательная форма дифференциальных уравнений регрессии (остатка), отличная для каждого заданного значения T_y .

В результате расчета ряда примеров оказалось:

для краткосрочного прогноза, при $T_y = 1 - 3$ года, лучше всего применять более сложные частные описания и большее число рядов селекции (квадратичные описания при 4—5 рядах селекции). Обычно при этом прогноз неустойчивый (расходится), но за указанное время он получается наиболее точным (дает минимум $\Delta^2(2)$);

для долгосрочного прогноза, при $T_y = 10-20$ лет, оптимальными оказываются простые линейные частные описания при малом числе рядов селекции (не более трех). Сглаживающее действие и устойчивость прогноза при этом больше и, следовательно, ошибка $\Delta^2(2)$ на интервале T_y минимальна. Уравнения прогнозирования, приводящие к неустойчивости вычислительной процедуры, дают наиболее точные прогнозы при малых упреждениях T_y . Другими словами, неустойчивые прогнозы обладают минимальным сглаживающим действием. Наоборот, уравнения прогнозирования, приводящие к затуханию, обладают самым большим сглаживанием.

Аналогичное положение существует в экспоненциальном сглаживании по формулам Брауна: выбор оптимального значения коэффициента сглаживания α зависит от требуемого времени упреждения прогноза [31].

Эти выводы действительны только для сравнительно точных дифференциальных уравнений регрессии, ошибка которых на всех точках не более 5% (ориентировочно). Если все дифференциальные уравнения менее точны, то лучше вести прогнозирование по одним трендам, без учета системной составляющей (остатка).

О способах повышения устойчивости долгосрочного системного многократного дифференциального прогноза. На интервале экстраполяции прогнозы раньше или позже отклоняются от действительного хода случайного процесса. Неустойчивым называется прогноз, при котором отклонение наступает сравнительно скоро. Устойчивый прогноз сохраняет свои прогнозирующие свойства при большом времени упреждения, хотя точность его при краткосрочных прогнозах может быть меньше, чем у неустойчивого. Поэтому при малом времени упреждения рекомендуются неустойчивые прогнозы, а при большом — устойчивые. Повысить устойчивость прогноза — значит удлинить время упреждения, при котором ошибка еще не очень велика. Такая задача возникает только при долгосрочных прогнозах. Рекомендуются следующие способы повышения устойчивости прогноза: выделение трендов оптимальной сложности; расширение и изменение состава переменных, образующих систему; наложение жестких связей на коэффициенты частных описаний в алгоритмах МГУА и упрощение вида этих описаний, применение критерия баланса переменных и этапа адаптации коэффициентов до $n_{см} = 0$.

Практически прогноз никогда не выполняют без выделения трендов, так как переменные обычно центрируются от среднего значения, что означает использование трендов нулевой степени. Выделение трендов оптимальной сложности, вместо отсчета от среднего, повышает устойчивость долгосрочного прогноза. Устойчивость «остатка» тем больше, чем точнее временной тренд.

Второй способ не требует особых пояснений: введение новых переменных или исключение плохо прогнозируемых переменных изменяет устойчивость и может повысить ее. Если составляющие характеристического вектора выбраны неудачно, т. е. не соответствуют природе системы, то точный долгосрочный прогноз не получится. Наличие «эффекта системности» определяется уже при первом интегрировании системы разностных уравнений. По одному уравнению можно получить точный прогноз только в редких случаях и то благодаря определяющей роли тренда (см. гл. II о прогнозе стока р. Днепр).

Наконец, наложение жестких связей на коэффициенты частных описаний повышает устойчивость долгосрочного прогноза, но снижает точность краткосрочных прогнозов. Долгосрочные прогнозы при линейном частном описании ($a_3 = a_4 = a_5 = 0$) наиболее устойчивы. Оригинальный способ предложен японским ученым

И. Ихара*. Вместо частного описания вида

$$y_k = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_i x_j$$

используется частное описание, в котором коэффициенты при x_i и x_j связаны определенным соотношением:

$$y_k = a_0 + a_1 z_k + a_2 z_k^2; \quad z_k = w x_i + (1 - w) x_j.$$

Известны и другие предложения по наложению дополнительных связей на коэффициенты частных описаний.

Два вида алгоритмов долгосрочного многократного прогнозирования по принципу самоорганизации. Для долгосрочного прогноза можно использовать алгоритмы МГУА для выделения временных трендов оптимальной сложности или алгоритмы системного многократного дифференциального прогноза. В том и другом случае используется принцип самоорганизации: вычислительная машина выбирает модель оптимальной сложности по минимуму критерия селекции. Выделение трендов следует применять для прогнозирования процессов, протекающих главным образом в функции времени, а дифференциальный прогноз — для более сложных процессов (имеющих значительную системную составляющую — остаток).

При выделении тренда рекомендуется предварительно просуммировать ординаты процесса, а затем выделить тренд от суммы этих ординат. От суммарного тренда легко вернуться к прогнозу ординат процесса на любом требуемом интервале времени. Алгоритмы многократного прогноза рекомендуются применять для систем взаимосвязанных переменных, влияющих друг на друга, где время не является определяющим. Интегрируя одновременно разностные уравнения для всех переменных, можно найти наиболее точный долгосрочный прогноз процессов в системе.

ПРОГНОЗ С ВЫДЕЛЕНИЕМ ДВУХ ВРЕМЕННЫХ ТРЕНДОВ ОПТИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ: ТРЕНДА ПЕРЕМЕННОЙ И ТРЕНДА ОТКЛОНЕНИЯ

Многие системы и их элементы описываются неоднородными уравнениями, содержащимися в правой части функции времени. Для прогноза изменения переменных в таких системах необходимо учитывать время как отдельный аргумент или предварительно выделять временные тренды оптимальной сложности.

При решении вопроса, нужно ли выделять тренды, следует воспользоваться слепым перебором вариантов (с трендом и без него)

* С. Ф. Козубовский. Обзор работ по МГУА в Японии. — «Автоматика», 1975, № 2.

либо добавочной априорной информацией о свойствах прогнозируемого процесса.

Часто при построении математических моделей сложных объектов приходится исходить из некоторого представления о характере процессов в них. Наиболее точно характер процессов представляется при помощи одного из следующих уравнений:

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k);$$

$$\varphi = f_1(t) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k);$$

$$\varphi = f(t_1, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k);$$

$$\varphi = f_1(t) + f_2(t_1, x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k).$$

Все эти уравнения представляют собой процессы, так как внешние воздействия v_i являются функциями времени. Во втором уравнении

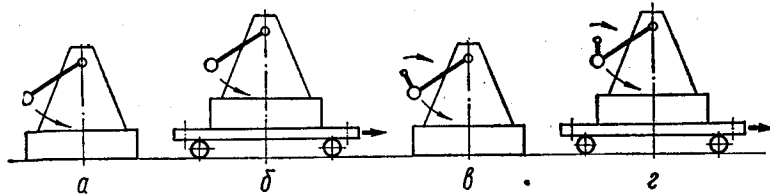


Рис. 24. Основные модели для выделения трендов:

а — маятник; б — маятник на подвижной платформе; в — маятник с переменными параметрами; г — маятник с переменными параметрами на платформе.

случайный процесс выражается суммой функции времени (тренда) и функции координат системы (остатка). Для систем, в которых такое разделение не вызывает недопустимого снижения точности, можно рекомендовать (в качестве иллюстрации) четыре основные модели:

Маятник (рис. 24, а). Применяется, если прогнозируемый процесс имеет нулевое среднее значение, и дисперсия отклонений постоянна. Выделение трендов не требуется.

Маятник на подвижной платформе (рис. 24, б). Применяется, если среднее значение за некоторый интервал времени (текущее среднее) изменяется, а дисперсия отклонений остается постоянной. Выделяется тренд переменных (первый тренд).

Маятник с переменными параметрами (рис. 24, в). Применяется, если текущее среднее значение постоянно, а дисперсия изменяется. Для увеличения точности выделяется тренд отклонений (второй тренд).

Маятник с переменными параметрами на подвижной платформе (рис. 24, г). Применяется, если среднее значение и дисперсия отклонений переменны во времени. Выделяются оба тренда: тренд переменной и тренд ее отклонения.

Указанные модели нужно рассматривать как модели детерминированной части объекта. На их выходные величины накладываются (аддитивно, мультипликативно или смешанно) случайные помехи.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА СИСТЕМНОГО, МНОГОКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОГНОЗА С ВЫДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕННЫХ ТРЕНДОВ

Синтез уравнений для дифференциального прогноза состоит из следующих этапов [17].

Составляется список всевозможных переменных, характеризующих объект. В нем выделяются: выходные переменные Φ_{ij} , внутренние промежуточные переменные V_{ij} и внешние воздействия Z_{ij} .

Из списка исключаются переменные, легко определяемые через другие переменные по известным формулам.

Для всех переменных находятся временные тренды оптимальной сложности, полиномиальные или гармонические [70, 49]:

$$\Phi_i(t); V_i(t); Z_i(t).$$

Как указывалось выше, выделение тренда переменных соответствует модели маятника на подвижной платформе, выделение тренда отклонения — модели маятника с переменными параметрами.

Расчеты показали, что для неплавных процессов следует рекомендовать выделение гармонического тренда. Если гармоническая составляющая на графике процесса не видна, то лучше, в смысле точности модели, отдельный временной тренд не выделять, а ввести время t в состав аргументов полного полинома. Уравнение регрессии представляет собой сумму тренда и остатка. Остаток является функцией системных параметров времени, представителем системы прямых и обратных связей. Алгоритм прогноза содержит в себе программу выделения тренда и программу синтеза остатка. Рассмотрим их.

Описание программы выделения гармонического тренда [49]. Исходные данные представляют собой набор N значений переменной за ряд лет (в прогнозе «Днепр» — значения среднегодового стока за сто лет с 1874 по 1973 г., $N = 100$).

Программа реализует пересчет абсолютных значений переменной в нормированные отклонения от среднего значения:

$$\varphi = \frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\bar{\Phi}}.$$

На первом этапе программы (элемент В на рис. 25) выделяется первая гармоника с использованием всех точек (для осуществления

* См. сноски на стр. 104 и 142.

седьмого способа регуляризации). При этом проводят такие операции вычисления:

весь период наблюдения $T = 100$ лет делится на 1000 равных частей (один год — на 10 частей), $\Delta T = 0,1$;

по исходным данным определяются коэффициенты A_i и B_i для 980 гармоник (двадцать частей пропадает из-за того, что наименьший период должен быть не менее 2 лет).

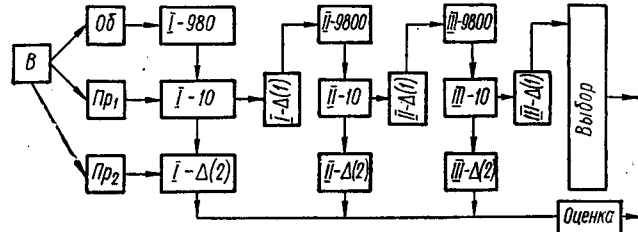


Рис. 25. Схема алгоритмов выделения гармонического тренда оптимальной сложности:

В — выделение основной гармоники; Об — выделение обучающей последовательности; Пр₁, Пр₂ — выделение первой и второй проверочной последовательности; I — 980, I — 10, I — Δ(1), I — Δ(2) — выделение гармоник и определение ошибок на 1-ом ряду селекции; II — 9800, II — 10, II — Δ(1), II — Δ(2); III — 9800, III — 10, III — Δ(1), III — Δ(2) — то же на 2-ом и 3-ем рядах селекции.

Для этого составляются и решаются следующие системы нормальных уравнений (всего 980 систем):

$$A_i \sum_t \sin^2 \frac{2\pi}{P_i} t + B_i \sum_t \cos \frac{2\pi}{P_i} t \sin^2 \frac{\pi}{P_i} t = \sum_t \varphi \sin \frac{2\pi}{P_i} t;$$

$$A_i \sum_t \sin \frac{2\pi}{P_i} t \cos \frac{2\pi}{P_i} t + B_i \sum_t \cos^2 \frac{2\pi}{P_i} t = \sum_t \varphi \sin \frac{2\pi}{P_i} t,$$

где i — номер системы уравнений и номер периода гармоники ($i = 1, 2, 3, \dots, 980$), $P_i = 100 - \Delta T (i - 1)$.

Определяются амплитуды гармоник

$$M_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$$

(всего 2×980 амплитуд) и наибольшая амплитуда. Гармоника с наибольшей амплитудой называется основной гармоникой. Определяются исходные точки, отвечающие вершинам этой основной гармоники. Для этого определяют период основной гармоники P_i , амплитуду этой гармоники $M_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ и момент времени пер-

вого максимума $T_i = \frac{T}{2\pi j} \arcsin \left(\frac{A_i}{M_i} \right)$. Все искомые вершины отвечают ближайшим точкам с абсциссами $T_i + 0,5kP_i$, где $k = 1, 2, 3, \dots = \frac{T}{P_i}$. Точки, ближайшие к вершинам основной гармони-

ки, образуют проверочную последовательность. В этом и состоит седьмой способ регуляризации. Остальные точки образуют обучающую и экзаменационную последовательности (элементы Об, Пр₁, Пр₂ на рис. 25).

Первый ряд селекции (элемент I). На следующем этапе выделяют $F = 10$ самых точных первых гармоник, но только по точкам обучающей последовательности. * Шаг дискретного деления оси времени остается тем же (1000 частей). Таким образом, 10 гармоник выбираются из 980 кандидатов на выбор.

Для выделения первых гармоник пользуемся системой уравнений, аналогичной предыдущей:

$$\begin{aligned} A_0 N + A_i \sum \sin \frac{2\pi}{P_i} t + B_i \cos \frac{2\pi}{P_i} t &= \sum \varphi; \\ A_0 \sum \sin \frac{2\pi}{P_i} t + A_i \sum \sin \frac{2\pi}{P_i} t + B_i \sin \frac{2\pi}{P_i} t \cos \frac{2\pi}{P_i} t &= \\ &= \sum \varphi \sin \frac{2\pi}{P_i} t; \\ A_0 \sum \cos \frac{2\pi}{P_i} t + A_i \sum \sin \frac{2\pi}{P_i} t \cos \frac{2\pi}{P_i} t + B_i \cos^2 \frac{2\pi}{P_i} t &= \\ &= \sum \varphi \cos \frac{2\pi}{P_i} t. \end{aligned}$$

Для каждой гармоники на точках проверочной последовательности определяется среднеквадратичная ошибка, %:

$$\Delta(1) = \frac{\sum (\varphi^* - \varphi^2)}{\sum (\varphi^*)^2} \cdot 100,$$

где φ — нормированное значение переменной в указанных точках, выполняемое по гармонике; φ^* — действительное значение, взятое из таблицы исходных данных.

Второй ряд селекции (элемент II). Вычитая ординаты гармоник, отобранных на первом ряду селекции из соответствующих данных исходной таблицы, находим $F = 10$ первых разностей. Для каждой разности выделяем $F = 10$ гармоник второго ряда (пользуясь только точками обучающей последовательности). В результате получим $F^2 = 9800$ вариантов формулы с двумя гармониками:

$$\begin{aligned} \varphi &= A_0 + \left(A_2 \sin \frac{2\pi}{P_1} t + B_1 \cos \frac{2\pi}{P_1} t \right) + \\ &+ \left(A_2 \sin \frac{2\pi}{P_2} t + B_2 \cos \frac{2\pi}{P_2} t \right). \end{aligned}$$

Оценка точности 9800 вариантов, по данным проверочной последовательности, позволяет выбрать $F = 10$ наиболее точных формул с двумя гармониками.

* Свобода выбора решений F устанавливается при помощи ряда проб. Для краткости приняли $F = 10$.

Третий и последующие ряды селекции. На третьем ряду селекции определяем $F = 10$ вторых разностей (остатков). Для каждой такой разности по точкам обучающей последовательности находим $F = 10$ гармоник третьего ряда. Всего получим $F^2 = 9800$ вариантов формулы с тремя гармониками

$$\varphi = A_0 + \left(A_1 \sin \frac{2\pi}{P_1} t + B_1 \cos \frac{2\pi}{P_1} t \right) + \\ + \left(A_2 \sin \frac{2\pi}{P_2} t + B_2 \cos \frac{2\pi}{P_2} t \right) + \left(A_3 \sin \frac{2\pi}{P_3} t + B_3 \cos \frac{2\pi}{P_3} t \right).$$

Оценка точности 9800 вариантов формулы с тремя гармониками по данным проверочной последовательности позволяет выбрать $F = 10$ наиболее точных формул с тремя гармониками.

В четвертом ряду селекции из 9800 вариантов выбираются десять самых точных формул с четырьмя гармониками и т. д. Нарастание рядов селекции (числа членов формулы) продолжается до тех пор, пока снижается ошибка на проверочной последовательности. На последнем ряду выбирается единственное, самое точное решение $F = 1$.

Единственное решение выбирается на последнем ряду в случае, когда нужно ограничиться только прогнозом по одному тренду:

$$\varphi = f(t).$$

Если же, кроме тренда, требуется использовать для прогноза еще и остаток, т. е. применить опорную функцию вида

$$\varphi = f(t) + f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

то остатки находятся для всех $F = 10$ решений последнего ряда. Из них выбирается тот, который вместе со своим трендом дает большую точность прогноза.

Описание программы для синтеза остатка [17]. В этой программе дифференциальные уравнения синтезируются для остатков, т. е. для отклонений выходных и промежуточных переменных от их временных трендов:

$$Z_i^0 = Z_i - Z_i(t); \Phi_i^0 = \Phi_i - \Phi_i(t); V_i^0 = V_i - V_i(t).$$

Выделение трендов необходимо для точного прогнозирования нестационарных процессов. Для стационарных процессов тренды замещаются средними значениями переменных. В программе применяется нормирование переменных по дисперсии, измеряемой от тренда:

$$\varphi_i^0 = \frac{\Phi_i - \Phi_i(t)}{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_1^n (\Phi_i - \Phi_i(t))^2}}; \quad v_i^0 = \frac{V_i - V_i(t)}{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_1^n (V_i - V_i(t))^2}}; \\ r_i^0 = \frac{Z_i - Z_i(t)}{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_1^n (Z_i - Z_i(t))^2}}.$$

Отсчет переменных от средних значений или от трендов повышает обусловленность матриц нормальных уравнений Гаусса. Одна из причин этого — уменьшение размерности матриц на единицу (т. к. пропадает свободный член полинома a_0); вторая причина — в матрице исчезают малые разности больших чисел. Все члены матрицы — одного порядка по величине.

Дифференциальные уравнения регрессии для отклонений будут иметь следующий вид:

$$\frac{d\varphi_i^0}{dt} = \Delta\varphi_1(t) + f_1(\varphi_1^0, v_i^0, z_i^0);$$

$$\frac{dv_i^0}{dt} = \Delta v_i(t) + f_2(\varphi_1^0, v_i^0, z_i^0).$$

Индекс «0» показывает, что переменные взяты в отклонениях от трендов. При синтезе дифференциальных уравнений применяется третий способ регуляризации (ранжировка точек по дисперсии и выбор самого короткого полинома).

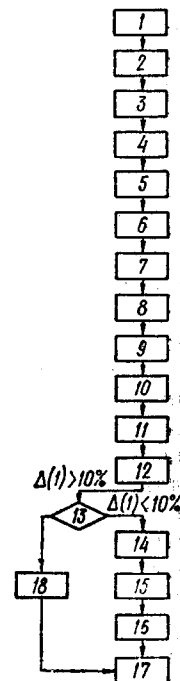
Точность полученных дифференциальных уравнений регрессии проверяется на всех имеющихся точках. Если ошибки $\Delta(1)_{\text{норм}}$ решений дифференциальных уравнений превосходят 5%, прогноз ведут только по трендам. Если ошибка меньше 5%, добавляют учет остатков. Алгоритм выделения остатков по трем критериям описан выше.

ОБЩАЯ СХЕМА АЛГОРИТМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРОГНОЗА

Общая схема алгоритма самоорганизации уравнений прогноза показана на рис. 26. Все этапы алгоритма, начинающиеся со слова «выбор», могут быть выполнены как при помощи проб (подход самоор-

Рис. 26. Схема алгоритма самоорганизации уравнений прогнозирования:

1 — выбор границ системы; 2 — выбор минимального числа характеристических переменных; 3 — выбор подхода к задаче моделирования; 4 — выбор модели детерминированной части; 5 — выбор числа трендов (один или два); 6 — синтез трендов переменных и оценки точности $\Delta^*(1)$ и $\Delta^*(2)$; 7 — переход к отклонениям от трендов; 8 — нормирование по дисперсии; 9 — синтез трендов отклонений и оценка точности $\Delta^*(1)$ и $\Delta^*(2)$; 10 — выбор среды моделирования (исходного множества признаков); 11 — выбор алгоритма (программы МГУА с протекцией, без протекции, обобщенного алгоритма и др.); 12 — синтез дифференциальных уравнений регрессии и оценки точности $\Delta^*(1)$ и $\Delta^*(2)$; 13 — проверка точности интерполяции по всем точкам; 14 — возвращение (пересчет) к абсолютному отсчету переменных; 15 — составление схемы модели; 16 — пошаговое интегрирование дифференциальных уравнений регрессии; 17 — составление таблицы прогноза; 18 — прогноз по одним трендам переменных.



ганизации в чистом виде), так и с привлечением достоверной детерминированной информации (комбинированный подход). Наличие в схеме алгоритма большого числа выборов, выполняемых человеком по ряду критериев, связанных с его мотивацией решения задачи, позволяет назвать алгоритм дифференциального прогноза *алгоритмом эвристической самоорганизации*.

Роль человека в алгоритмах самоорганизации состоит в том, что он заранее указывает (пользуясь некоторым языком высшего порядка — метаязыком) среду решения задачи и общие эвристические критерии (правила) переборов. Таким образом, открывается возможность построения так называемых «сплошных», закрытых для человека, программ, в которых, например, по ряду экспериментальных данных, непосредственно вычисляется оптимальное уравнение, без вывода из машины дифференциальных уравнений. Такие программы (рассматриваются в гл. V) могут быть включены в цепь автоматического управления.

МНОГОКРАТНОЕ ДОЛГОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ГODOVOGO CTOKA PEK

По сравнению с алгоритмами МГУА однократного прогноза алгоритмы для системного многократного дифференциального прогноза имеют ряд преимуществ при решении задачи долгосрочного прогноза: при них значения аргументов не стареют с увеличением упреждения прогноза, кроме того, для селекции можно непосредственно использовать критерий точности прогнозирования $\Delta^2(2) \rightarrow \min$ (где $\Delta^2(2)$ — усредненная ошибка прогноза), определяемый на всех заданных точках, что выгодно при малом числе исходных данных.

Методика селекции уравнений прогнозирования показана на примерах прогноза стока р. Днепр на десять лет вперед и прогноза экономических показателей Англии на четыре года вперед (см. пример 11).

Оптимальное по сложности описание (математическая модель) процесса речного стока отвечает минимуму средней квадратичной ошибки прогнозирования, измеренной на отдельных последовательностях данных. В прикладной математике нет аппарата, пригодного для получения модели оптимальной сложности. Только принципы многорядной селекции позволяют получить оптимальную прогнозирующую модель речного стока. Простейшая модель представляет собой функцию времени. Она состоит из ряда гармоник, амплитуды и частоты (некратные) которых находятся с учетом свободы выбора решений. Для повышения точности такой модели к ней может быть добавлен остаток — функция многих переменных, влияющих на сток. В качестве таких переменных использованы данные об актив-

ности Солнца и о стоке какой-либо реки, который не повторяет точно прогнозируемого. Ниже, в примере для прогноза стока р. Днепр, использованы данные о числах Вольфа и о стоке р. Неман за сто лет.

Движение небесных тел, солнечных и лунных затмений можно рассчитать точно на тысячи лет вперед. Случайные процессы со спектральной характеристикой, близкой к «белому шуму», принципиально нельзя прогнозировать даже на одну секунду вперед.

Реальные процессы, происходящие в природе, содержат в общем случае как детерминированную составляющую, поддающуюся долгосрочному прогнозу, так и элемент «чистой» (равновероятной) случайности, прогнозу не поддающейся. Процесс годового стока рек не является исключением из этого правила. Поэтому вопрос о возможности его долгосрочного прогнозирования сводится к тому, насколько значительно в нем детерминированная составляющая.

Многие ученые уже приходили к выводу о возможности долгосрочного прогнозирования ряда естественных процессов. Так, в работе Х. Кимуры [51] показано, что относительное число солнечных пятен поддается разложению в гармонический ряд с некратными частотами.

В работе [19] установлено, что сток Северной Двины повторяет в некотором масштабе изменение стока некоторых других рек с отставанием на два-три года. Это дает возможность прогнозировать сток одних рек по наблюдениям прошлого стока других рек.

Однако в настоящее время, несмотря на имеющиеся исследования, возможность долгосрочного прогнозирования стока рек все еще остается под вопросом. Объясняется это отсутствием в прикладной математике оптимальных способов выделения детерминированной составляющей случайных процессов.

До сих пор прикладная математика располагала для этой цели только методом наименьших квадратов (или быстрым преобразованием Фурье). Одна из форм такого метода — разложение случайного процесса в гармонический ряд по критерию минимума квадрата отклонений. Для решения данной задачи подходит разложение в гармонический ряд с некратными частотами. Разложение годографа стока рек в гармонический ряд с кратными частотами гармоник совершенно неприемлемо из-за отсутствия в стоке рек точной периодичности. Однако при этом необходимо помнить, что если первая гармоника выделена так, чтобы обеспечить минимум среднеквадратичной ошибки в основном процессе, а вторая — минимум в первой разности, то сумма двух таких гармоник не соответствует минимуму среднеквадратичной ошибки, так как оптимальная сумма двух (и большего числа) неортогональных функций не есть сумма двух оптимальных функций.

Пока выведены формулы выделения только одной гармонической составляющей по критерию минимума среднеквадратичной ошибки.

Математика не может что-либо предложить для оптимизации сумм двух и больше гармоник с некратными (подлежащими определению) периодами. Кроме того, если бы даже соответствующая математическая формула существовала, она соответствовала бы идее «чем сложнее (чем больше учтено гармоник), тем точнее», что неверно. С точки зрения теории самоорганизации следует стремиться к единственной модели оптимальной сложности и находить ее.*

Рассмотрим два вида гармонического разложения.
Гармонический ряд Фурье с кратными частотами:

$$\varphi = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi k_1}{T}t + \Theta_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi k_2}{T}t + \Theta_2\right) + \\ + A_3 \sin\left(\frac{2\pi k_3}{T}t + \Theta_3\right) + \dots,$$

где $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3 \dots$

Гармонический ряд с некратными частотами:

$$\varphi = A_0 + A_1 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{T} + k_1\right)t + \Theta_1\right] + A_2 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{T} + k_2\right)t + \Theta_2\right] + \\ + A_3 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{T} + k_3\right)t + \Theta_3\right] + \dots$$

где $k_1 = 0, k_2 = 0,1, k_3 = 0,2 \dots$ — некоторые числа.

Таким образом ряды отличаются по виду закона повышения частоты гармоник. Из-за ортогональности членов первым рядом пользоваться удобнее, но из этого не следует, что всегда этот ряд является точной аппроксимацией процесса. Сумма гармоник первого ряда (при любом конечном числе членов) является периодической функцией времени, а сумма второго ряда — нет. Уже по этому свойству гармонический ряд с кратными гармониками не подходит для точной аппроксимации годографа стока реки, где периодичности не наблюдается. Для непериодических процессов более точные результаты можно получить, применяя ряды с некратными гармониками. Однако в этих рядах члены неортогональны, и выделять гармоники по одной нельзя; жесткий выбор первой гармоники ограничивает свободу выбора всех остальных гармоник и т. д. Чтобы сохранить свободу выбора, следует переменить принцип самоорганизации.

Решить эти задачи позволяют методы эвристической самоорганизации, в частности, метод группового учета аргументов (МГУА). Применяя эти методы, можно будет решать задачи долгосрочного прогноза среднегодового и среднемесячного стока рек.

Выделение гармонического тренда оптимальной сложности методом самоорганизации. Для решения задачи выделения оптимального ряда гармоник (тренда) методом МГУА сначала из основного процесса выделяется несколько (F) первых гармоник с различными частотами по критерию минимума среднеквадратичной ошибки Δ (1), измеряемой на проверочной последовательности исходных данных. Амплитуды и частоты первых гармоник определяют по точкам,

* Разработана также другая программа выделения гармонического ряда некратных частот, отличающаяся быстроедействием (см. журнал «Автоматика», 1975, № 1).

образующим обучающую последовательность. Затем вычитанием определяют F первых разностей, и для каждой разности находят по тому же критерию F вторых гармоник. При этом общее число вариантов разложения становится равным F^2 . Из этого числа по условию минимума Δ (1) снова выбирается только F сумм двух гармоник, для которых находят столько же вторых разностей и т. д.

Такой процесс многорядной селекции продолжается до тех пор, пока ошибка на проверочной последовательности стремится к уменьшению. На последнем ряду селекции выбирается единственная гармоника и прослеживается вся ветвь предшествующих гармоник. В результате находится единственное оптимальное представление детерминированной составляющей случайного процесса в виде оптимального гармонического тренда, состоящего из суммы нескольких гармоник с некратными частотами.

Гипотеза селекции [37] утверждает, что если «свобода выбора» F достаточна, то при селекции наилучшее оптимальное решение (определяемое как результат полного перебора всех возможных сумм гармоник) не будет потеряно. Очень неточные гармоники не могут войти в оптимальный ряд, так как они исключаются в процессе последовательного многорядного отбора.

Обычно применяемое «жесткое» решение при $F = 1$, соответствующее отбору одной гармоники на каждом шаге, приводит к низкой точности. В этом и состоит основной недостаток существующих «жестких» алгоритмов последовательного выбора решений. Чрезмерное увеличение свободы выбора F быстро приводит к увеличению объема счета и при определенных условиях даже снижает точность. Таким образом, существует оптимальное значение свободы выбора $F_{\text{опт}}$.

Первый опыт выделения гармонического тренда оптимальной сложности методом самоорганизации для прогноза «Днепр» дал очень хорошие результаты (см. пример ниже). Однако требуется проверка метода в течение ряда лет и на других реках.

Способ проверки оптимальности тренда. Практически существует единственный способ убедиться в том, что гармонический тренд в виде суммы многих гармоник, полученный при достаточно большой свободе выбора F , является оптимальным по критерию селекции. Для этого можно улучшить его при помощи случайного поиска в пространстве его коэффициентов, частот и фаз (этап адаптации коэффициентов). В данном примере (прогноз стока р. Днепр) случайный поиск показал, что, варьируя эти величины, нельзя более улучшить критерий селекции на значительную величину. Следовательно, оптимальный гармонический тренд найден.

Учет влияния на сток различных факторов (дополнительно к данным о стоке рассматриваемой реки). Если точность прогноза по гармоническому тренду с некратными частотами окажется недоста-

точной, следует усложнить вид уравнения прогнозирования и попытаться найти другие, кроме времени, существенные аргументы, определяющие сток.

Прогноз по тренду оптимальной сложности означает использование уравнения регрессии вида $d = f(t)$. При этом модель включает только рассматриваемую реку, и тренды определяются исключительно по данным ее стока за ряд прошлых лет.

Прогноз по сумме тренда и остатка соответствует уравнению

$$d = f_1(t) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

где первое слагаемое представляет собой тренд, а второе — остаток.

Модель в этом случае включает не только данные по рассматриваемой реке, но и различные элементы космической системы с переменными $x_1, x_2, \dots, x_m$. Элементы, которые следует включать в модель, выбираются прагматически. Например, в описываемом примере для прогноза стока р. Днепр использовались данные об активности Солнца и о стоке Немана. По-видимому, в качестве «второй реки» может быть взята любая, сток которой не коррелирован жестко со стоком основной рассматриваемой реки. Необходимо стремиться к наименьшей коллинеарности стоков исследуемых рек.

Чтобы оптимизировать сумму тренда и остатка, последний должен выделяться для нескольких (F) наиболее точных трендов, с тем, чтобы иметь возможность выбрать сумму, дающую минимум ошибки Δ (1). Эта сумма не обязательно должна включать в себя наиболее точный тренд.

Пример 9. Моделирование процесса стока р. Днепр *. Для системного прогнозирования стока р. Днепр использованы три переменные: активность Солнца S (число Вольфа), годовой сток р. Днепр вблизи Киева D и годовой сток р. Неман вблизи Вильнюса N . Эти переменные отражают несомненно лишь ничтожную часть взаимосвязей, присущих огромной космической системе. Тем не менее, со-

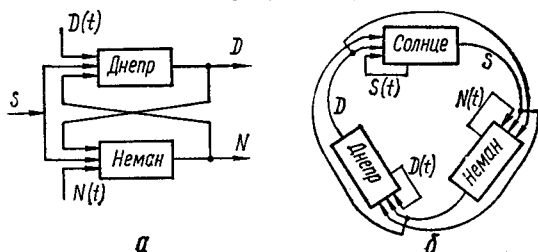


Рис. 27. Два варианта исходной схемы системы «Солнце—Днепр—Неман»: а — «неавтономная» система при комбинированном подходе (с учетом элементов детерминированной информации); б — «автономная» система при подходе самоорганизации (всевозможные связи).

гласно точке зрения, изложенной выше, можно построить некоторую частную модель системы, связывающую только указанные три переменные. При этом, если точность прогноза будет неудовлетворительной, следует увеличить число учитываемых аргументов за счет привлечения дополнительной информации о других факторах, определяющих величину стока.

* Пример написан совместно с аспирантом Н. Н. Тодуа.

На рис. 27 показаны два возможных варианта исходной схемы модели системы «Солнце — Днепр — Неман». Схема рис. 27, а соответствует комбинированному подходу к прогнозированию, когда требуется внесение элементов априорной детерминированной информации о выходных величинах и внешних воздействиях, схема рис. 27, б соответствует подходу самоорганизации. В последнем случае предполагаются существующими всевозможные связи, которые могут отсутствовать в действительности (например, влияние рр. Днепра и Немана на Солнце). При этом в процессе расчета должны выявиться существующие связи и отброситься несуществующие.

Комбинированный подход рекомендуется использовать, когда исходные данные имеют ограниченный характер и значительно зашумлены. Подход на основе более полной реализации принципа самоорганизации целесообразен в случае большого числа данных и при малых помехах. В данном примере рассматривается комбинированный подход, т. е. прогноз осуществляется по схеме рис. 27, а.

При синтезе трендов использован седьмой способ регуляризации, при котором в первую проверочную последовательность входят точки, отвечающие вершинам основной, максимальной по амплитуде, гармонической составляющей процесса (около $1/3$ точек); остальные точки (около $2/3$) включаются в обучающую последовательность. Для каждого тренда будет указана ошибка, полученная на проверочной последовательности.

Программа системного многократного дифференциального прогноза [17] предусматривает переход к измерению переменных в отклонениях от их трендов и нормирование по дисперсии:

$$S_i^o = S_i - S_i(t); \quad D_i^o = D_i - D_i(t); \quad N_i^o = N_i - N_i(t);$$

$$s_i = \frac{S_i - S_i(t)}{\sigma_s}; \quad d_i = \frac{D_i - D_i(t)}{\sigma_d}; \quad n_i = \frac{N_i - N_i(t)}{\sigma_n},$$

где

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S_i - S_i(t))^2}; \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (D_i - D_i(t))^2};$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (N_i - N_i(t))^2}.$$

Индекс «о» означает, что переменные берутся в отклонениях от трендов.

Для нормированных значений переменных, полученных по приведенным формулам, и осуществляется синтез дифференциальных уравнений. Вопрос выбора глубины учитываемой предыстории решается при помощи проб. В рассматриваемом примере точность дифференциальных уравнений достаточна, если учитывать запаздывание аргументов на 20 лет. При такой глубине учета предыстории число первичных аргументов равно 61.

Для сокращения входного описания при помощи корреляционного анализа были отобраны наиболее эффективные аргументы (признаки). В результате этой операции нормированный остаток для прогноза «Днепр» оказался следующей функцией:

$$d^o = d^o(d_0^o, n_{-17}^o, n_{-18}^o, n_{-20}^o, d_{-8}^o, d_{-7}^o, n_{-19}^o, n_{-3}^o, s_0^o, d_{-3}^o, n_{-15}^o, n_{-14}^o, n_{-9}^o, s_{-16}^o, s_{-8}^o, n_{-6}^o, n_{-7}^o, n_{-12}^o, d_{-9}^o, s_{-9}^o),$$

а нормированный остаток для прогноза «Неман»

$$n^o = n^o(n_0^o, n_{-3}^o, n_{-1}^o, d_0^o, n_{-2}^o, n_{-10}^o, n_{-7}^o, n_{-6}^o, n_{-20}^o, d_{-1}^o, n_{-9}^o, n_{-12}^o, n_{-16}^o, n_{-11}^o, n_{-13}^o, s_{-20}^o, n_{-4}^o, s_{-9}^o, s_{-18}^o, s_0^o),$$

где нижний индекс указывает запаздывание отсчета переменной в годах.

При синтезе дифференциальных уравнений регрессии алгоритм МГУА выбирает из приведенных 20-ти аргументов те, которые реально действуют в физической модели (при условии малых помех). Синтез дифференциальных уравнений регрессии выполняется по программе [17], реализующей многократный дифференциальный метод прогноза. В результате расчета оказалось, что в данном примере при времени упреждения прогноза $T_y = 10$ лет оптимальным по сложности является линейное частное описание, а оптимальное число рядов селекции равно трем.

Так как «протекция переменных» в программе [17] отсутствует, то полученная математическая модель объекта содержит значительно меньшее, чем ранее, число аргументов (равное пяти):

$$\frac{\Delta d^o}{\Delta t} = f_1(d_0^o, s_{-9}^o, n_{-12}^o, n_{-16}^o, n_{-17}^o); \quad \frac{\Delta n^o}{\Delta t} = f_2(s_{-18}^o, s_0^o, n_0^o, n_{-2}^o, n_{-6}^o).$$

Интегрирование этих уравнений с учетом трендов дает системный многократный долгосрочный прогноз для двух переменных d и n одновременно.

Выбор модели детерминированной части и числа трендов. Для выбранного варианта неавтономной системы (рис. 27, а) можно составить следующую систему уравнений:

$$D = D(t) + D^o(t; sND); \quad \frac{dD^o}{dt} = \Delta D^o(t) + f_1(s^o D^o N^o);$$

$$N = N(t) + N^o(t; sDN); \quad \frac{dN^o}{dt} = \Delta N^o(t) + f_2(s^o D^o N^o),$$

где $D(t)$, $N(t)$ — тренды переменных; $\Delta D^o(t)$, $\Delta N^o(t)$ — тренды отклонений; D^o , N^o — остатки переменных; f_1 , f_2 — остатки отклонений.

Только для упрощения примера (в ущерб точности прогноза) вместо более общей модели «маятника с переменными параметрами на подвижной платформе» выберем модель «маятника на подвижной платформе» (рис. 24), т. е. положим

$$\Delta D^o(t) = 0; \quad \Delta N^o(t) = 0.$$

Исходные данные для прогноза «Днепр» приведены в табл. 9.

Выбор модели «маятника на подвижной платформе» означает, что для каждой переменной выделяются полиномиальные или гармонические тренды оптимальной сложности $D(t)$. Для данного примера подходящими являются гармонические тренды.

Синтез уравнений трендов переменных и оценки их точности. В результате вычислений по программе [49] получены следующие уравнения трендов переменных:

тренд активности Солнца

$$S(t) = S(t)_1 + S(t)_2 + \dots + S(t)_8,$$

где:

$$S(t)_i = a_{i0} + a_{i1} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + a_{i2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right);$$

$$S(t)_1 = -1,3443 - 18,1167 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 8,4562 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 117,42;$$

$$S(t)_2 = -0,0287 + 5,7495 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 33,6911 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 10,70;$$

$$S(t)_3 = 0,3829 - 4,8565 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 23,3997 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 9,54;$$

$$S(t)_4 = 0,7904 - 8,4681 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 6,8642 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 12,44;$$

$$S(t)_5 = 0,5338 - 11,1173 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 0,1051 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 8,96;$$

$$S(t)_6 = -0,0051 + 3,2072 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 1,6486 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 22,3;$$

$$S(t)_7 = 0,0808 + 1,9882 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 3,3899 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 17,66;$$

$$S(t)_8 = 0,1828 - 3,3252 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 3,9357 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 4,82.$$

Ошибка на проверочной последовательности $\Delta(1) = 5,6\%$;
тренд для стока р. Днепр

$$D(t) = D(t)_1 + D(t)_2 + \dots + D(t)_5,$$

где:

$$D(t)_i = a_{i0} + a_{i1} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + a_{i2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right);$$

$$D(t)_1 = -27,7141 + 77,5322 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 33,0889 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 13,02;$$

$$D(t)_2 = -44,7933 - 78,2831 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 103,5872 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 8,92;$$

$$D(t)_3 = -0,0828 + 53,5574 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 10,0088 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 21,72;$$

$$D(t)_4 = -0,7436 - 45,6069 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 50,6196 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 27,52;$$

$$D(t)_5 = 0,5392 - 62,5526 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + 23,0743 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 3,74.$$

Ошибка $\Delta(1) = 7,2\%$;

тренд для стока р. Неман

$$N(t) = N(t)_1 + N(t)_2 + \dots + N(t)_8,$$

где:

$$N(t)_i = a_{i0} + a_{i1} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + a_{i2} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

$$N(t)_1 = -0,0177 - 0,3839 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 0,0174 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 24,62;$$

$$N(t)_2 = 0,0013 + 0,1741 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 0,2379 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 15,34;$$

$$N(t)_3 = 0,0031 + 0,2515 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 0,1560 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 52,46;$$

$$N(t)_4 = 0,0036 + 0,0049 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 0,3193 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad T = 7,8;$$

$$N(t)_5 = -0,0036 - 0,0983 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 0,4303 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), T = 8,38;$$

$$N(t)_8 = 0,0049 - 0,0343 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 0,1866 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), T = 13,02;$$

$$N(t)_7 = -0,0011 - 0,1544 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 0,2536 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), T = 8,96;$$

$$N(t)_8 = -0,0006 - 0,1015 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 0,0937 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), T = 3,74.$$

Ошибка $\Delta(1) = 1,7\%$.

При синтезе трендов используется описанный выше седьмой способ регуляризации. Тренды представлены суммой гармоник с некратными периодами.

Таблица 12

Выбор сложности частных описаний и числа рядов селекции при $T_y = 10$ лет

Для переменной	Частные описания	Ошибки, %, при числе рядов селекции			
		1	2	3	4
D	$y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j$	$\Delta(1)=47$ $\Delta(2)=9,5$	$\Delta^2(1)=50$ $\Delta^2(2)=8,0$	$\Delta^2(1)=40$ $\Delta^2(2)=5,9$	$\Delta^2(1)=47$ $\Delta^2(2)=6,7$
	$y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j$	$\Delta(1)=47$ $\Delta(2)=9,4$	$\Delta^2(1)=485$ $\Delta^2(2)=7,3$	$\Delta^2(1)=45$ $\Delta^2(2)=7,0$	$\Delta^2(1)=44$ $\Delta^2(2)=6,5$
	$y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2$	Нет решения	$\Delta^2(1)=43$ $\Delta^2(2)=6,6$	$\Delta^2(1)=37$ $\Delta^2(2)=7$	Нет решения
N	$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$	$\Delta^2(1)=4$ $\Delta^2(2)=2$	$\Delta^2(1)=41$ $\Delta^2(2)=2,5$	$\Delta^2(1)=37$ $\Delta^2(2)=1,8$	$\Delta^2(1)=38$ $\Delta^2(2)=2,9$
	$y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j$	$\Delta^2(1)=42$ $\Delta^2(2)=2,6$	$\Delta^2(1)=39$ $\Delta^2(2)=1,9$	$\Delta^2(1)=40$ $\Delta^2(2)=2$	$\Delta^2(1)=38$ $\Delta^2(2)=1,9$
	$y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2$	Нет решения	$\Delta^2(1)=41$ $\Delta^2(2)=2$	$\Delta^2(1)=39$ $\Delta^2(2)=2,4$	Нет решения

Примечание. Минимумы ошибок $\Delta^*(1)$ и $\Delta^*(2)$ выделены рамкой.

Результаты системного многократного дифференциального прогноза с учетом тренда переменных. Программа [17] реализует дифференциальный метод прогноза.

Выбор оптимальной сложности частных описаний и числа рядов селекции представлен в табл. 12.

Оказалось, что в данном примере при времени упреждения прогноза $T_y = 10$ лет минимумы ошибок $\Delta^2(1)$ и $\Delta^2(2)$ соответствуют одной и той же клетке

Таблица 13

Дифференциальные модели стоков рек

Реки	Ряд селекции	Выходная величина	Аргументы x_1, x_2	Коэффициенты уравнений		
				a_0	a_1	a_2
Днепр $\Delta^2(1)=40\%$, $\Delta(2)=6\%$	3	$\frac{\Delta d^0}{\Delta t}$	z_1, z_2	-0,000537	1,117182	-0,126343
	2	z_1, z_2	$y_{19}, y_{20}, y_{15}, y_{17}$	0,000498 0,000003	0,116877 0,036011	0,891624 0,964039
	1	y_{19}	$d_{0,}^0, n_{-17}^0$	0,152631	-0,855078	-0,127008
		y_{20}	$d_{0,}^0, n_{-16}^0$	0,132647	-0,876814	0,25948
		y_{15}	$d_{0,}^0, n_{-12}^0$	0,151949	-0,889417	0,006781
		y_{17}	$d_{0,}^0, s_{-9}^0$	0,163511	-0,885469	-0,033712
Неман $\Delta^2(1)=37\%$, $\Delta(2)=1,8\%$	3	$\frac{\Delta n^0}{\Delta t}$	z_{17}, z_{19}	0,000491	0,457792	0,551231
	2	z_{17}, z_{19}	$y_{17}, y_{18}, y_{15}, y_{20}$	0,005954 0,003792	0,110462 0,075992	0,991755 0,994145
	1	y_1	s_{-18}^0, s_0^0	-0,0492944	0,101731	-0,364329
		y_{18}	$n_{0,}^0, n_{-2}^0$	0,128382	-1,326392	-0,235378
		y_{20}	$n_{0,}^0, n_{-6}^0$	0,156188	-1,136223	-0,239548

таблицы *. Оптимальным по сложности является линейное частное описание, а оптимальное число рядов селекции равно трем.

Полученные при такой сложности результаты приведены в табл. 13. Для того, чтобы пояснить условную запись уравнений динамики, применяемую в этой таблице, ниже проводится запись первого уравнения (элемент «Днепр») в обычной форме. 1-й ряд (уровень) селекции:

$$y_{19} = 0,152631 - 0,855078d_{0,}^0 - 0,127008n_{-17}^0;$$

$$y_{20} = 0,132647 - 0,876814d_{0,}^0 + 0,25948n_{-16}^0;$$

$$x_{15} = 0,151949 - 0,889417d_{0,}^0 + 0,006781n_{-18}^0;$$

$$y_{17} = 0,163511 - 0,885469d_{0,}^0 - 0,033712s_{-9}^0.$$

* Это дает возможность отказаться вообще от подсчета критерия $\Delta(1)$ и пользоваться всюду критерием $\Delta^*(2)$.

Таблица 14

стока р. Днепр по годам

Величины стока, м³/с							Ошибка за 4 года $\Delta(2)$, %
1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	
925	1218	1328	1145	1197	1413	1500	17
909	1150	1217	1283	—	—	—	21,1
998	1215	1289	1290	1198	1339	1401	17,2
1410	1980	1205	710	1140	1377	1427	31,2
1300	—	—	—	—	—	—	

$$\text{Ошибка } \Delta(2) = \frac{(\bar{D}_0 - \bar{D})^2}{\bar{D}_0^2 - \bar{D}^2} \cdot 100.$$

Сравнение долгосрочных прогнозов

Кривая на рис. 29	Метод прогноза			
		1971	1972	1973
4	По гармоническому тренду оптимальной сложности при VII способе регуляризации	1635	1061	909
6	Однократный прогноз на 1977 г. по тренду с учетом остатка (IV и III способы регуляризации соответственно)	1814	1398	930
5	Многократный дифференциальный прогноз по тренду с учетом остатка (IV и III способ регуляризации соответственно)	1638	1290	1050
1	Прогноз, изложенный в работе [64]	1350	1650	1330
8	Действительный расход воды в реке	1830	1030	1060

Примечание. Лучшие результаты прогноза за 4 года выделены рамкой (см. также табл. 9).

2-й ряд селекции:

$$z_1 = 0,000489 + 0,116877y_{19} + 0,891624y_{20};$$

$$z_2 = 0,00003 + 0,036011y_{45} + 0,964039y_{17}.$$

3-й ряд селекции:

$$\frac{\Delta d^0}{\Delta t} = -0,000537 + 1,117182z_1 - 0,126343z_2.$$

Исключая промежуточные переменные, получим линейное дифференциальное уравнение регрессии с запаздывающими аргументами для стока р. Днепр:

$$\frac{\Delta d^0}{dt} = 0,1323 - 0,8768d_0^0 -$$

$$-0,0000307n_{-12}^0 + 0,259n_{-16}^0 - 0,01658n_{-17}^0 + 0,004s_{-9}^0.$$

Пользуясь приведенными уравнениями, находим абсолютные значения переменных и составляем схему дифференциальной модели объекта (рис. 28). Цифры на линиях связи показывают, с каки-

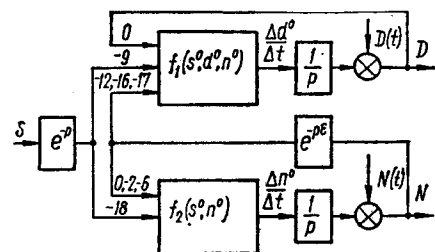


Рис. 28. Дифференциальная модель системы «Солнце — Днепр — Неман».

ми запаздываниями измеряются аргументы. Убеждаемся, что число аргументов значительно сократилось.

Алгоритм МГУА без «протекции переменным» отобрал самые влиятельные аргументы.

Получаем уравнение для прогнозирования стока р. Днепр:

$$\frac{\Delta d^0}{\Delta t} = f_1(d_0^0, s_{-9}^0, n_{-12}^0, n_{-16}^0, n_{-17}^0).$$

Уравнение для прогнозирования стока р. Неман

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = f_2(s_{-18}^0, s_0^0, n_0^0, n_{-2}^0, n_{-6}^0).$$

Интегрируя оба полученные уравнения год за годом, получаем системный многократный долгосрочный прогноз для двух переменных d и n одновременно, с учетом трендов. Результат интегрирования уравнений, приведенных в табл. 13, показан на рис. 29 (кривая 5) и в табл. 14. При этом среднеквадратичная ошибка на проверочной последовательности $\Delta^2(1) = 7,2\%$. Расчет показал, что если бы не выделялись гармонические тренды переменных и не учитывалось время среди аргументов, то точность прогноза снизилась бы почти в два раза, т. е. $\Delta^2(1) = 13\%$.

Сравнение полученных долгосрочных прогнозов для стока р. Днепр. В табл. 14 и на рис. 29* приведены результаты прогнозов

* Пояснения к рис. 29 даны в табл. 9 и 14.

стока р. Днепр на 1971—1980 гг., полученные по однократному и многократному методам прогноза.

Благоприятным в приведенных результатах является тот факт, что все прогнозы, полученные на основе разработанных положений (как однократные, так и многократные, как по трендам, так и с учетом остатков), укладываются в узкую «трубку» (рис. 29). Нижний край трубки — это прогноз стока, на который следует ориентирова-

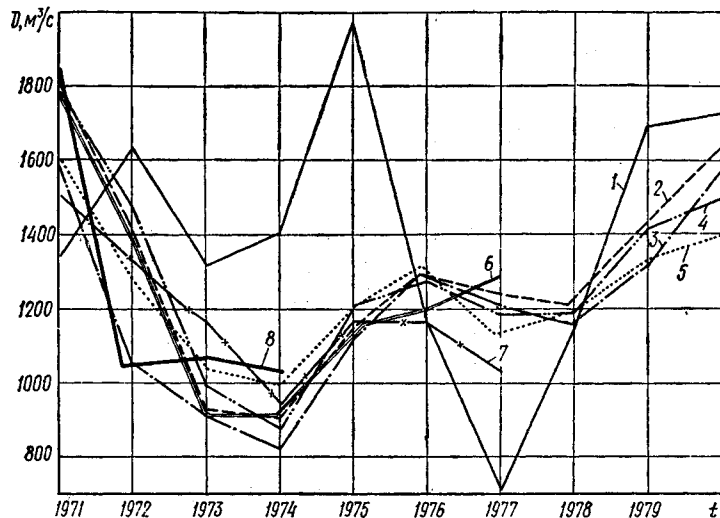


Рис. 29. Варианты прогнозируемого хода годового стока р. Днепр возле г. Киева, полученные при различных методах прогноза.

ться, так как занижение прогноза менее опасно, чем его завышение. Близость результатов однократного и многократного прогнозов объясняется тем, что в обоих прогнозах основную часть выражает временной тренд. Роль остатка здесь незначительна.

Результаты прогнозов, показанные на рис. 29, могли быть получены еще в конце 1970 г., так как для прогноза использовались данные до этого года включительно. С течением времени прогнозы следовало пересчитывать в конце каждого последующего года, чтобы учесть новую появившуюся информацию.

К моменту написания этой книги действительные значения, м³/с, среднегодового стока р. Днепр оказались следующими: в 1970 г. — 2490; 1971 г. — 1830; 1972 г. — 1030; 1973 г. — 1060; в 1974 г. — 1300.

Наиболее точным по критерию $\Delta(2)$ пока является прогноз по гармоническому тренду без учета остатка. Этот вывод не окончательный. Для долгосрочного прогноза следует все же ожидать лучшие результаты от системного многократного дифференциального

прогноза (учитывающего тренд и остаток), так как на первой проверочной последовательности ошибка при добавлении остатка уменьшилась (при прогнозе по тренду $\Delta(1) = 7,2\%$, при учете тренда и остатка $\Delta(1) = 5\%$). Однако сейчас уже можно сделать вывод о малом влиянии системы на данный случайный процесс. Он идет, главным образом, в функции времени.

Некоторым нарушением принципа самоорганизации в изложенном выше примере было то, что остатки подбирались к одному, самому оптимальному тренду (на последнем ряду селекции было принято $F = 1$).

Теория самоорганизации подчеркивает, что оптимальная сумма не является суммой двух оптимальных в отдельности функций. Следовательно, все, что было сделано выше, необходимо повторить, например, для $F = 10$ трендов, близких к оптимальному, и выбрать лучший, единственный вариант. Это не относится к прогнозам по одному тренду без учета остатка, которые можно считать окончательными (для выдачи в 1970 г.).

МНОГОКРАТНОЕ ДОЛГОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СРЕДНЕМЕСЯЧНОГО СТОКА РЕК ПО ПРИНЦИПУ САМООРГАНИЗАЦИИ

Для решения многих важных задач управления водохозяйственными системами требуются долгосрочные прогнозы как среднегодовых, так и среднемесячных значений стока рек.

Для прогноза среднегодовых значений стока выше был предложен алгоритм выделения на основе принципа самоорганизации сложного гармонического тренда, состоящего из суммы гармоник с некоторыми периодами.

Опорная функция прогноза среднегодового стока имеет вид

$$Q_{\text{год}} = f_1(t) + f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m),$$

где $f_1(t)$ — сумма оптимального числа гармоник с некратными периодами (тренд); f_2 — степенной полином оптимальной сложности, учитывающий влияние на сток каких-либо физических факторов $x_1, \dots, x_m$ (остаток). Оптимальная сложность как тренда, так и остатка определяется по минимуму ошибки на отдельной проверочной последовательности данных, которая не используется при вычислении оценок коэффициентов. Среднеквадратичная ошибка определяется по формуле

$$\Delta(1) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{пр}}} (Q_k - Q_k^*)^2}{\sum_{k=1}^{N_{\text{пр}}} Q_k^{*2}}},$$

где Q_k — результат вычислений; Q_k^* — действительный расход; k — номер точки; $N_{пр}$ — число точек проверочной последовательности.

В поиске единственной модели оптимальной сложности состоит основная особенность методов, основанных на принципе самоорганизации, который кратко можно сформулировать так: оптимальная сложность математической модели сложного объекта находится по минимуму целесообразно выбранного критерия селекции, обладающего свойствами внешнего дополнения (по терминологии теоремы неполноты Геделя из математической логики).

До тех пор, пока критерий селекции (ошибка $\Delta(1)$) падает, машина постепенно наращивает сложность тренда (число гармоник) и тем самым находит прогнозирующую формулу оптимальной сложности.

Комбинированный метод прогноза среднемесячных расходов рек. Изучение данных стока рек показало, что средний расход рек за каждый месяц коррелирован как со среднегодовым, так и с расходом предыдущего месяца. Это дало возможность предложить комбинированный метод прогноза среднемесячного стока, включающий два этапа: прогноз среднегодового стока при помощи выделения тренда (см. прогноз стока р. Днепр) и прогноз среднемесячных значений стока с помощью регрессионных зависимостей:

$$Q_i = f_i(Q_{год}Q_{i-1}), \quad i = \overline{1, 12},$$

где $Q_{год}$ — значение среднегодового стока; Q_i , Q_{i-1} — средние расходы двух соседних месяцев.

Обе прогнозирующие формулы $Q_{год}$ и Q_i синтезируются прямыми методами по данным наблюдений за стоком реки с определением их оптимальной сложности по принципу самоорганизации. Уравнение регрессии, отвечающее минимуму критерия селекции $\Delta(1)$ определяется при помощи полного перебора уравнений (см. табл. 11) для каждого месяца отдельно.

Согласно принципу самоорганизации, оптимальная сложность математической модели соответствует минимуму некоторого целесообразно выбранного критерия селекции. Для рассматриваемой функции от двух переменных Q_i в качестве такого критерия селекции принимается среднеквадратичная ошибка аппроксимации на «новых» точках.

Из всех полученных таким образом полиномов выбирается лучший, в смысле минимума среднеквадратичной ошибки на проверочной последовательности $\Delta(1)$.

Постепенное усложнение полиномов, аппроксимирующих произвольную функцию от двух переменных $z = \varphi(x_1, x_2)$, показано в табл. 11. В каждой колонке этой таблицы имеется 2^n полиномов,

Таблица 15
Средние расходы воды р. Северский Донец, м³/с

Годы	Месяцы												Среднегодовые расходы
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1893	52,0	47,5	438	682	169	107	93,2	65,6	48,9	84,8	93,5	71,0	163
1894	55,7	153	201	589	111	66,6	75,9	41,3	42,6	51,6	73,5	44,8	126 *
1895	53,4	93,2	452	558	97,0	66,8	48,4	35,6	35,1	36,2	43,6	40,7	130
1896	31,0	31,7	32,6	330	82,4	70,4	64,3	69,1	56,5	42,4	43,3	78,0	139
1897	90,0	43,7	677	927	82,1	78,3	46,6	32,6	28,5	31,9	36,4	33,6	176
1898	32,6	68,3	43,5	967	94,9	78,6	62,2	44,4	34,2	33,9	42,9	51,7	130
1899	69,6	95,6	287	606	76,8	37,6	43,4	47,6	42,4	47,5	46,3	44,6	120
1900	34,0	32,4	146	482	103	45,0	45,3	25,9	24,3	26,6	36,9	32,6	86,2
1901	38,8	155	281	353	64,6	43,9	28,9	23,2	23,1	25,9	29,4	39,2	92,2
1902	93,7	107	196	139	53,8	53,5	45,6	38,6	27,2	26,2	25,5	23,3	69,3
1903	47,9	191	401	109	30,7	40,5	64,7	31,5	25,8	23,4	31,2	37,2	86,2
1904	27,9	70,0	219	196	46,8	23,9	26,5	24,5	21,3	22,3	29,9	32,7	61,7 *
1905	24,6	26,6	36,8	392	93,5	37,1	26,1	20,1	17,0	22,4	28,5	25,6	62,5
1906	23,5	23,8	431	348	25,2	20,7	37,9	34,1	27,9	27,7	32,7	34,5	88,9
1907	27,9	25,4	147	802	82,2	33,7	34,6	34,6	29,4	24,0	23,5	33,9	108
1908	22,7	66,2	66,3	939	325	36,9	37,6	36,5	23,1	25,6	29,9	30,2	137
1909	27,5	16,3	305	568	88,5	41,4	37,0	23,0	18,5	17,0	17,7	25,4	100
1926	30,0	112	221	742	132	57,6	23,8	17,1	17,7	28,9	37,1	33,4	144
1927	28,1	19,2	305	438	76,0	38,1	68,5	68,4	33,7	27,5	35,0	28,5	97,2 *
1928	28,6	66,9	52,8	575	142	67,1	42,5	58,6	55,1	50,6	67,6	73,4	107
1929	48,4	24,2	29,3	947	571	85,0	38,9	23,4	19,5	22,1	34,1	28,8	156
1932	135	60,6	212	1290	190	103	91,1	48,4	30,9	33,1	48,4	52,9	191
1933	31,9	23,1	143	510	105	80,4	83,1	51,0	34,8	35,2	45,5	27,4	97,5
1934	20,7	33,3	300	222	38,2	31,5	32,9	39,0	24,7	25,8	40,4	33,9	69,4
1935	22,8	42,1	177	155	85,6	40,9	18,9	22,4	21,8	23,3	30,2	43,8	57,0
1936	60,6	118	252	331	62,5	41,4	21,1	12,9	13,3	18,1	23,9	29,9	82,1
1937	25,4	18,4	523	336	55,9	19,7	17,0	23,6	20,6	20,0	33,0	54,1	97,0
1938	53,5	77,4	96,8	184	93,6	33,4	21,3	16,3	16,2	18,5	27,2	18,5	54,7
1939	24,7	91,6	209	725	98,4	39,0	25,7	18,6	13,0	24,5	39,5	51,3	113
1940	31,1	31,0	201	1160	207	65,6	44,7	62,8	67,8	74,6	86,2	78,6	176
1941	77,8	413	638	889	267	112	99,3	133	103	113	152	135	261
1944	56,7	93,4	146	131	85,3	47,5	48,0	47,7	35,4	36,5	48,6	48,4	68,7 *
1945	31,0	31,4	99,7	716	109	65,0	53,2	67,7	62,8	53,5	63,6	56,6	117
1946	97,3	167	345	770	102	34,4	23,8	22,1	21,1	31,7	49,8	28,5	140
1947	20,1	47,2	499	704	105	53,9	22,4	21,6	26,9	33,2	54,0	81,2	139
1948	127	160	137	290	80,0	51,1	32,9	26,0	23,2	22,2	47,1	37,3	87,0
1949	27,4	26,7	121	262	78,2	30,3	51,5	35,8	22,0	24,9	33,0	41,5	62,9 *
1950	29,2	68,5	246	168	57,3	25,6	38,0	24,4	22,9	45,0	63,3	65,5	71,3
1951	45,2	28,7	457	642	80,7	44,9	24,7	22,0	25,1	26,8	32,7	32,8	122
1952	41,5	66,6	105	670	154	65,1	48,7	36,2	27,0	37,2	70,0	87,6	117
1953	149	79,2	199	1160	136	63,2	36,3	26,5	25,6	32,3	30,1	33,5	164
1954	28,7	23,6	40,5	163	78,9	44,6	25,5	19,7	21,4	28,3	40,5	48,0	47,0 *
1955	311	507	363	200	71,8	68,0	45,4	33,6	18,6	23,1	30,9	48,2	143
1956	95,6	47,8	67,5	850	128	39,6	36,7	41,6	47,3	40,3	47,7	65,1	126
1957	34,1	150	297	416	68,9	30,9	24,7	21,4	21,5	27,9	29,6	44,9	97,2

Продолжение табл. 15

Го- ды	Месяцы												Среднего- вые расходы
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1958	58,6	305	321	136	104	43,2	111	43,8	29,2	33,3	55,5	48,7	107
1959	56,0	60,6	109	264	78,9	34,1	22,8	24,3	30,0	34,0	35,2	25,8	64,6
1960	141	360	378	496	68,7	26,3	23,8	29,0	31,8	42,1	84,2	121	150
1961	94,6	87,8	119	116	77,0	91,6	34,3	24,0	29,3	34,3	37,2	34,2	65,0
1962	32,0	70,1	103	129	45,3	35,0	16,6	20,5	19,0	24,5	38,5	39,7	47,8

Примечание. Звездочками отмечены точки, отнесенные в проверочную последовательность; остальные точки составили обучающую последовательность.

где $n = 0, \dots, 4$, причем сложность их постепенно увеличивает-ся, что и необходимо для нахождения минимума критерия селек-ции $\Delta(1)$.

Пример 10. Прогнозирование расхода р. Северский Донец *. Рассмотрим в качестве примера применение комбинированного метода для прогноза стока р. Северский Донец. Данные наблюдений за 50 лет приведены в табл. 15. Для образова-ния обучающей и проверочной последовательности данных при синтезе уравне-

Таблица 16

Коэффициенты и периоды T_k гармонического тренда годового стока р. Северский Донец

Коэффи- циенты	Номер гармоники					
	1	2	3	4	5	6
b_0	-0,65	0,95	-1,30	-2,46	-1,35	8,99
b_1	5,08	-9,99	4,93	11,63	4,37	11,72
b_2	3,96	-16,9	-9,42	-12,6	11,15	7,93
T_k	2,63	10,55	3,89	6,51	4,88	5,36

ний прогноза использовались данные за 45 лет, с 1893 по 1957 гг. включительно. Точность прогноза проверялась по данным за последние пять лет, с 1958 по 1962 гг. (вторая проверочная, или экзаменационная последовательность).

Прогнозирование среднегодового стока по гармоническому тренду. Методика про-гноза среднегодового стока была изложена выше. Уравнения прогноза среднегодо-вых значений стока были получены по программе [49], реализующей алгоритм

* Пример написан совместно с аспирантами В. Степашко и Ю. Чукиным.

Таблица 17

Действительные и прогнозируемые значения среднегодового стока р. Северский Донец

Годы	Расход, м³/с	
	$Q_{\text{действ}}$	$Q_{\text{прог}}$
1958	61,07	97,3
1959	64,6	109
1960	150	130
1961	65,0	123
1962	47,8	69,4

выделения оптимального гармоническо-го тренда с некротными гармониками. При этом использовались данные о среднегодовых расходах (табл. 14).

В результате вычислений получен гармонический ряд, состоящий из по-стоянного члена (среднего значения стока) и шести гармоник:

$$Q_{\text{год}}(t) = \bar{Q} + Q_1(t) + \dots + Q_6(t).$$

Дальнейшее повышение числа гар-моник уже не способствует снижению $\Delta(1)$. Слагаемые Q_k имеют вид:

$$Q_k(t) = b_0^k + b_1^k \sin \frac{2\pi}{T_k} t + b_2^k \cos \frac{2\pi}{T_k} t, \\ k = 1, \dots, 6,$$

где соответствующие значения коэффициентов b_0^k, b_1^k, b_2^k и периода T_k приведе-ны в табл. 16. Результаты прогноза сведены в табл. 17.

Прогнозирование среднемесячного стока (по полиному оптимальной слож-ности). Были получены двенадцать (по числу месяцев) регрессионных моделей оптимальной сложности с использованием данных о среднемесячных расходах (табл. 16). При этом разделение на обучающую и проверочную последовательности было оставлено тем же, что и при выделении гармонического тренда. Оказалось, что моделью оптимальной сложности (отвечающей минимуму критерия $\Delta(1)$) для всех месяцев, кроме четвертого, является линейная модель:

$$Q_i = a_0^i + a_1^i Q_{i-1} + a_2^i Q_{\text{год}}, \quad i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.$$

Значения коэффициентов уравнения модели приведены в табл. 18.

Уравнение регрессии, оптимальное для апреля месяца,

$$Q_4 = -90 - 0,64 Q_3 + 6,868 Q_{\text{год}} - 0,00616 Q_3 Q_{\text{год}}.$$

Среднемесячное прогнозирование по данным прогнозов среднегодового стока и формулам для Q_i и Q_4 . С помощью полученных зависимостей для Q_i и Q_4 , а также

Таблица 18

Значения коэффициентов уравнения модели для одиннадцати месяцев года (кроме апреля)

Коэф- фици- енты	Месяцы											
	1	2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	
a_0	—26,1	—5,25	59,5	—23,8	15	8,8	19,3	—4,6	1,1	1,5	5,7	
a_1	1,063	0,874	0,356	—0,085	0,028	0,537	0,407	0,436	0,873	1,209	0,825	
a_2	0,345	0,414	1,307	1,503	0,303	0,061	—0,03	0,187	0,059	0,016	0,039	

Таблица 19

Расход воды р. Северский Донец, м³/с

Годы	Результаты прогноза по комбинированному методу											
1958	$\frac{49,1}{47,4}$	$\frac{78,0}{80,5}$	$\frac{214}{228}$	$\frac{313}{343}$	$\frac{95,8}{106}$	$\frac{47,2}{50,9}$	$\frac{40,1}{42,7}$	$\frac{32,9}{33,7}$	$\frac{27,9}{30,1}$	$\frac{31,3}{33,7}$	$\frac{40,3}{43,9}$	$\frac{43,2}{46,1}$
1959	$\frac{57,6}{45,2}$	$\frac{90,4}{61,0}$	$\frac{234}{165}$	$\frac{352}{186}$	$\frac{110}{57,5}$	$\frac{51,1}{36,5}$	$\frac{42,9}{32,3}$	$\frac{33,7}{30,6}$	$\frac{30,5}{20,8}$	$\frac{34,3}{23,1}$	$\frac{44,6}{30,4}$	$\frac{46,8}{33,3}$
1960	$\frac{68,7}{61,2}$	$\frac{109}{110}$	$\frac{269}{295}$	$\frac{415}{479}$	$\frac{136}{157}$	$\frac{58,2}{64,5}$	$\frac{48,0}{50,4}$	$\frac{35,2}{35,6}$	$\frac{35,1}{39,0}$	$\frac{39,5}{44,0}$	$\frac{51,4}{57,1}$	$\frac{53,1}{58,7}$
1961	$\frac{73,0}{58,7}$	$\frac{109}{73,0}$	$\frac{260}{170}$	$\frac{361}{173}$	$\frac{128}{60,2}$	$\frac{55,8}{34,6}$	$\frac{46,3}{32,4}$	$\frac{34,7}{30,7}$	$\frac{33,6}{20,9}$	$\frac{37,8}{23,2}$	$\frac{49,1}{30,6}$	$\frac{51,0}{33,5}$
1962	$\frac{52,1}{26,0}$	$\frac{69,1}{37,2}$	$\frac{174}{135}$	$\frac{201}{113}$	$\frac{63,4}{38,4}$	$\frac{37,8}{30,7}$	$\frac{33,3}{28,2}$	$\frac{30,9}{29,4}$	$\frac{21,8}{17,1}$	$\frac{24,3}{18,9}$	$\frac{31,9}{25,1}$	$\frac{34,8}{28,3}$

Примечание. Верхние значения в графе каждого года получены при использовании среднегодового прогноза, нижние — данные действительного среднегодового стока.

с учетом расхода за декабрь 1957 г. и полученных прогнозов среднегодовых значений стока (табл. 17) был составлен долгосрочный прогноз среднемесячных расходов на 5 лет (60 месяцев) вперед с 1958 по 1962 гг. Результаты прогноза сведены в табл. 19 и показаны на рис. 30, где сплошной линией нанесен действительный гидрограф, а пунктирной — его прогноз. Среднеквадратическая ошибка прогноза $\Delta(2) = 0,569$.

Прогнозирование по истинным значениям среднегодового стока и формулам для Q_i и Q_4 . Для выяснения достоверности регрессионных моделей был составлен

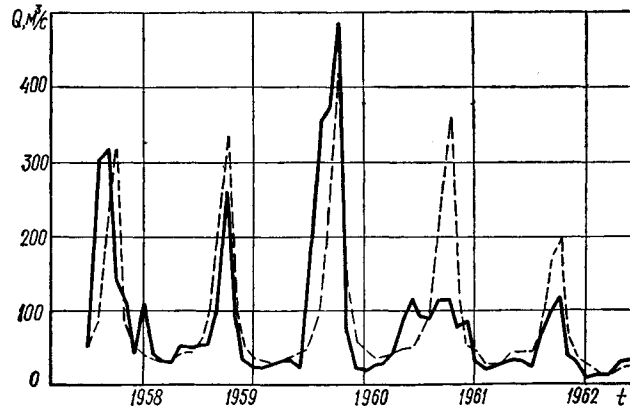


Рис. 30. График прогнозирования среднемесячного стока р. Северский Донец по прогнозу годового стока и по формулам для Q_i и Q_4 .

прогноз с использованием истинных среднегодовых расходов, имевших место в 1958—1962 гг. Результаты представлены в табл. 10 и на рис. 31. Легко заметить некоторое улучшение прогноза. Относительная ошибка прогноза на 5 лет $\Delta_{cp}(2) = 0,458$, причем она распределена по годам следующим образом: 1958 г. — $\Delta_1(2) = 0,651$; 1959 — $\Delta_2(2) = 0,319$; 1960 — $\Delta_3(2) = 0,388$; 1961 — $\Delta_4(2) = 0,398$; 1962 г. — $\Delta_5(2) = 0,272$.

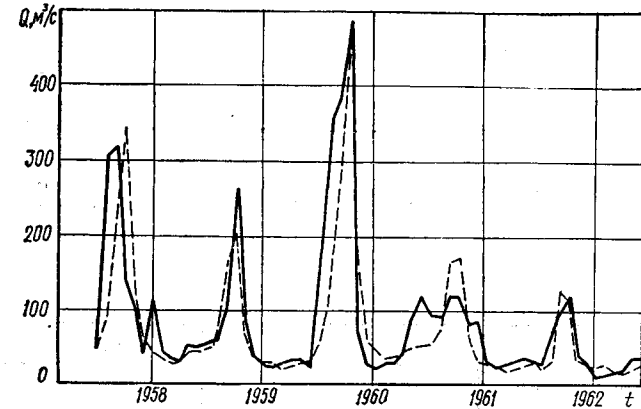


Рис. 31. График прогнозирования среднемесячного стока р. Северский Донец по точным данным годового стока и по формулам для Q_i и Q_n .

Наибольшая ошибка приходится на первый прогнозируемый год. Но этот год, как видно из рис. 22, нетипичен, поскольку паводковый период в этом году был смещен на целый месяц, и учесть такое редкое явление при долгосрочном прогнозировании трудно. Если исключить этот год, то ошибка прогноза на остальные четыре года составит $\Delta_{cp}^*(2) = 0,375$, что говорит об эффективности рассматриваемого метода. Замечательной его особенностью является то, что практически отсутствует накопление ошибки: при прогнозе такой большой заблаговременности (60 месяцев вперед) последний, пятый год предсказан так же точно, как и второй.

Аналогичным образом можно построить алгоритм среднедекадного прогноза (по среднегодовому и среднемесячному).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В предыдущей главе на конкретных примерах сложных систем (сток воды р. Днепр, экономика Англии) были выяснены оптимальные способы целенаправленной регуляризации — разделения имеющих точек на обучающую и проверочную последовательности. Была получена рекомендация использовать при выводе уравнений трендов четвертый (а еще лучше — седьмой) способ, а при выводе остатков — третий способ регуляризации.

В данном разделе используется тот же поисковый метод: на конкретном примере сложной системы (экономика Англии) выясняются

два вопроса: о целесообразности выделения отдельных временных трендов при системном многократном прогнозе и об эффективности введения в машину дополнительной достоверной априорной информации о блоках структуры системы.

Для выяснения этих вопросов ниже синтезируются по программе [17] и сравниваются между собой четыре математические модели экономики Англии (табл. 20).

Таблица 20

Сравнение моделей экономики Англии

Особенности моделей	С отдельным трендом $\varphi = f(t) + f(x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k)$	Без отдельного тренда $\varphi = f(t_1, x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k)$
Без спецификации структуры	Модель № 1	Модель № 3
С использованием информации о структуре	Модель № 2	Модель № 4

При построении математических моделей сложных объектов приходится исходить из некоторого представления о характере процессов в них. Возможные гипотезы о наличии в системе генераторов смещения были рассмотрены раньше (рис. 24). Обычно все многообразие систем удастся представить при помощи одного из следующих уравнений регрессии:

$$\begin{aligned}\varphi &= f(x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k); \\ \varphi &= f_1(t) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k); \\ \varphi &= f(t_1, x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k).\end{aligned}$$

Эти уравнения соответствуют гипотезе «маятника с постоянными параметрами». При гипотезе «маятника с переменными параметрами на подвижной платформе» следует пользоваться уравнением

$$\varphi = f_1(t) + f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k).$$

Все четыре уравнения выражают собой процессы, так как внешние (регулирующие и возмущающие) воздействия являются функциями времени. Во втором уравнении случайный процесс представлен суммой отдельной функции времени (тренда) и функцией координат системы (остатка). В третьем уравнении время рассматривается как одна из фазовых координат, т. е. как рядовой аргумент объекта.

В данном разделе сравниваются между собой эффективности применения для моделирования второго и третьего уравнений при указании структуры системы и без такого указания (табл. 20).

Первая задача — сравнение указанных уравнений на конкретном примере по точности.

Вторая задача состоит в следующем. Известно, что при самоорганизации модели можно задать ЭВМ только общий список возможных аргументов системы. Это — минимальный объем априорной информации, необходимый для самоорганизации. Если имеется достоверная информация о блочной структуре системы, ее также передают машине.

Дает ли внесение такой априорной информации существенное повышение точности, будет выяснено ниже.

Все указанные четыре модели (табл. 20) синтезируются по алгоритму «системного, многократного, дифференциального прогноза», основанного на принципах самоорганизации. Этот алгоритм подробно описан выше и соответствует вычислительной программе, приведенной в работе [17]. Программа была использована для синтеза дифференциальных уравнений регрессии экономики Англии. При значительном времени упреждения прогноза $T_y \geq 4$ программа автоматически синтезировала систему линейных уравнений с запаздывающими аргументами, так как оказалось, что нелинейные уравнения при большом времени упреждения приводят к неустойчивым и неточным прогнозам. Все четыре модели при времени упреждения прогноза $T_y \geq 4$ лет выбраны ЭВМ линейными.

Общий список переменных (см. табл. 5) взят по данным модели детерминированного типа (основанной на анализе причин и следствий), разработанной П. Парксом и Ф. Пиаттом [86], схема которой показана на рис. 21. Соответствующие исходные данные были взяты из статистических справочников за 1969—1970 гг. (см. табл. 5).

Информация о блочной структуре системы вводилась в машину только при синтезе моделей № 2 и 4: в программе для каждого дифференциального уравнения было указано свое фазовое пространство, т. е. свой список возможных переменных. При синтезе моделей № 1 и 3 структура соединения блоков системы ЭВМ не указывалась.

Из исходного множества переменных были выбраны выходные переменные Φ_1 и Φ_2 , промежуточные внутренние переменные $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ и регулирующие воздействия M_1, M_2, M_3 (табл. 5, рис. 21). Для моделей № 1 и 2 были выделены временные тренды оптимальной сложности (полиномиальные или гармонические) для всех переменных $\Phi_i(t)$, $X_i(t)$ и $M_i(t)$. При синтезе трендов, как указывалось, рекомендуется применять седьмой, а при синтезе остатка — третий способ регуляризации.

Дифференциальные уравнения синтезируются для остатков, т. е. для отклонений переменных от их временных трендов:

$$\Phi_i^o = \Phi_i - \Phi_i(t); \quad X_i^o = X_i - X_i(t); \quad M_i^o = M_i - M_i(t).$$

Переменные нормируются по трендам:

$$\varphi_i^0 = \frac{\Phi_i - \Phi_i(t)}{\sqrt{\frac{1}{s} (\Phi_i - \Phi_i(t))^2}}; \quad v_i^0 = \frac{X_i - X_i(t)}{\sqrt{\frac{1}{s} (X_i - X_i(t))^2}};$$

$$z_i^0 = \frac{M_i - M_i(t)}{\sqrt{\frac{1}{s} (M_i - M_i(t))^2}}.$$

Для моделей № 3 и 4 (модели без трендов) вместо трендов используются средние значения (полиномиальные тренды нулевой степени). В этом случае дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f_1(\varphi_i^0, v_i^0, z_i^0); \quad \frac{dv}{dt} = f_2(\varphi_i^0, v_i^0, z_i^0).$$

При синтезе дифференциальных уравнений рекомендуется третий способ регуляризации (ранжировка точек по дисперсии и выбор самого короткого полинома).

Глубина учитываемой предыстории была взята равной четырем годам. Только 19 точек (с 1947 по 1965 гг.) были использованы для синтеза уравнений. Остальные 4 точки (с 1966 по 1969 гг.) использовались для экзамена (проверки) прогноза. Чтобы получить линейную модель (выбор такой модели пояснялся выше), в алгоритмах МГУА используются линейные частные описания вида $y = a_0 + a_1x_i + a_2x_j$. Для каждой переменной ЭВМ выбрала четыре ряда селекции. Точность моделей оценивалась при помощи двух среднеквадратичных показателей, %: среднеквадратичной ошибки на первой проверочной последовательности (p точек)

$$\Delta^2(1) = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} (A_i - A_{\text{пр}i})^2}{\sum_{i=1}^{i=p} A_i^2} \cdot 100,$$

где A_i — действительное значение переменной; $A_{\text{пр}i}$ — значение, полученное по уравнению регрессии, и среднеквадратичной ошибки на второй проверочной (экзаменационной) последовательности (4 точки с 1966 по 1969 гг. включительно)

$$\Delta^2(2) = \frac{\sum_{i=1}^4 (A_i - A_{\text{пр}i})^2}{\sum_{i=1}^4 A_i^2} \cdot 100.$$

Ошибка $\Delta^2(1)$ использовалась для селекции наиболее регулярных уравнений регрессии, ошибка $\Delta^2(2)$ — для оценки точности прогноза на четыре года вперед.

Методика сравнения моделей.* Для сравнения точности прогноза отдельных переменных и для получения оценки точности прогноза нескольких переменных используется относительная величина суммы ошибок, %:

$$\varepsilon(2)_i = \frac{[\Delta^2(2)_{66} + \Delta^2(2)_{67} + \Delta^2(2)_{68} + \Delta^2(2)_{69}] i}{[\Delta^2(2)_{66} + \Delta^2(2)_{67} + \Delta^2(2)_{68} + \Delta^2(2)_{69}]_{\max}} \cdot 100,$$

где максимальное значение суммы ошибок прогноза выбирается для наихудшей модели. Тем самым каждая модель получает относительную оценку ошибки (выраженную в процентах от ошибки худшей модели).

В этом случае величину

$$\Sigma \varepsilon(2)_{\text{норм}} = \frac{1}{7} [\varepsilon(2)_{x_1} + \varepsilon(2)_{x_2} + \varepsilon(2)_{\varphi_1} + \varepsilon(2)_{\varphi_2} + \varepsilon(2)_{\varphi_3} + \varepsilon(2)_{x_4} + \varepsilon(2)_{x_5}]$$

можно использовать в качестве нормированной оценки модели по ее точности: чем больше $\Sigma \varepsilon(2)_{\text{норм}}$, тем модель хуже по точности прогноза.

Пример 11. Моделирование экономической системы Англии. Выясняются два вопроса: о целесообразности выделения отдельных временных трендов и об эффективности введения в машину дополнительной достоверной информации о блоках структуры системы. Сравнение моделей (по изложенной специальной методике) показало, что выделение отдельного тренда снижает точность.** Следовательно, можно рекомендовать уравнение регрессии общего вида, где время является одной из фазовых координат:

$$\varphi = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m, v_1, v_2, \dots, v_k).$$

Сообщение машине достоверной информации о блоках структуры не очень сильно, но все же повышает точность модели. При времени упреждения прогноза на 4 года вперед машина выбрала линейные частные описания и всего четыре ряда селекции. Результаты прогнозирования при помощи интегрирования полученных дифференциальных уравнений шаг за шагом сведены в табл. 21. Значения регулирующих воздействий были взяты из табл. 5.

Ниже приведены дифференциальные уравнения и структурная схема для модели № 4. Эта модель могла быть синтезированной уже в конце 1965 г., так как для ее синтеза использовались данные на этот год включительно. Затем ее следовало пересчитывать в конце каждого последующего года с тем, чтобы адаптировать к данным каждого нового года.

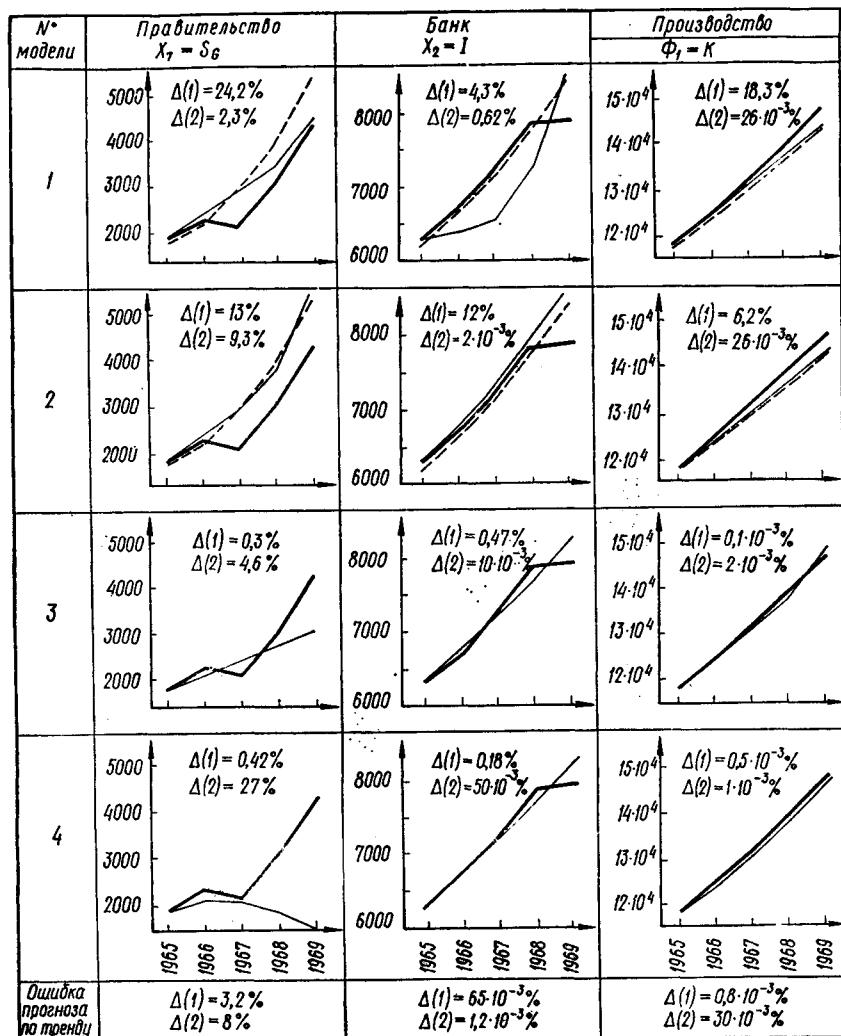
По виду систем дифференциальных уравнений были составлены структурные схемы экономики Англии в 1965 г. (рис. 32). Заметим, что ошибка прогноза на четыре года вперед (с 1966 по 1969 гг.) довольно мала, что свидетельствует об эффективности системного многократного прогноза на всех четырех моделях.

Сравнивая показатели точности, можно убедиться, что только переменную $X_7 = S_G$ лучше исключить из модели или прогнозировать по одному тренду,

* Раздел и последующий пример написаны совместно с инж. Б. К. Светальским.

** Еще более снижает точность отсутствие учета функций времени вообще, что свойственно обычному системному подходу.

Результаты прогноза

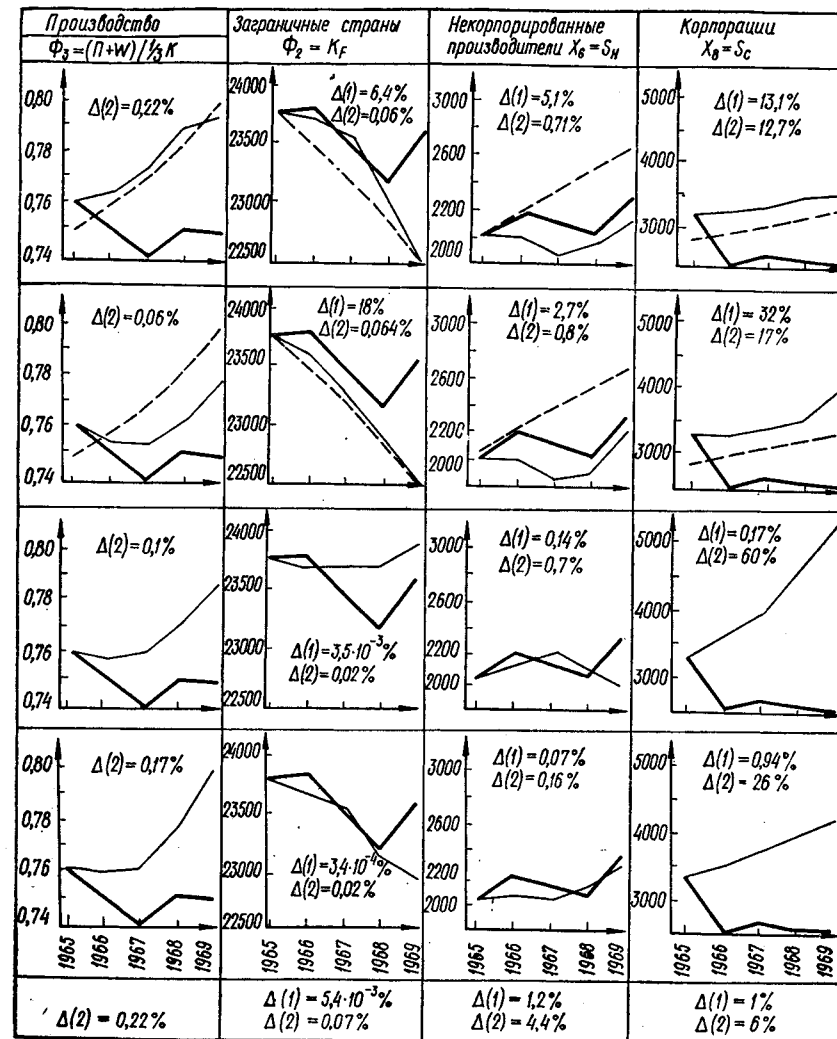


Примечание: — действительный ход процесса; --- тренд; — прогноз.

как функцию времени без учета остатка. Прогнозы остальных шести переменных значительно улучшаются при учете влияния всех других аргументов, кроме времени, т. е. при учете «остатка» или «системы», хотя роль системы и не очень велика.

Сравнение моделей и выводы исследования. Модели сравнивались по точности прогноза. Всего в системе имелось семь выходных переменных, соответствующих следующим элементам модели:

основных входных переменных



«Правительство» ($X_7 = S_G$);

«Банк» ($X_2 = I$);

«Производство» ($\Phi_1 = K$ и $\Phi_3 = \frac{W + \Pi}{\frac{1}{3} K}$);

«Заграничные страны» ($\Phi_2 = K_F$);

«Некорпорированные предприятия» ($X_8 = S_H$);

«Корпорации» ($X_8 = S_C$).

Учет остатков (и, следовательно, применение дифференциальных моделей) проверялся для этих выходных переменных.

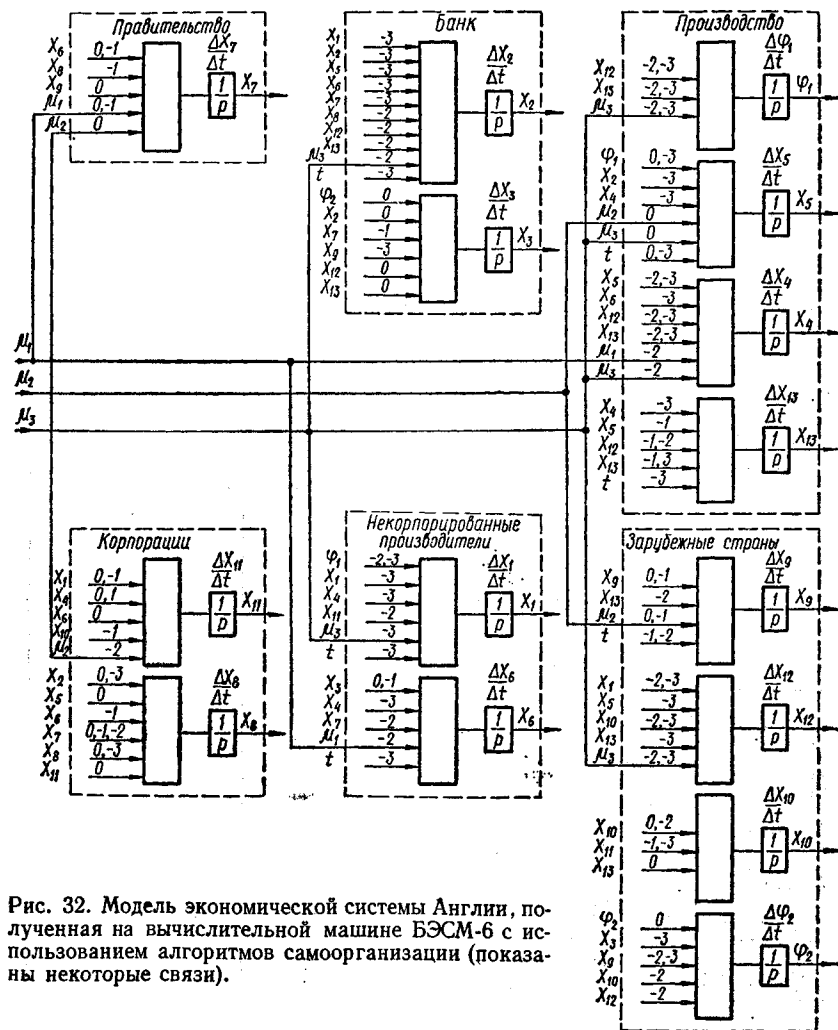


Рис. 32. Модель экономической системы Англии, полученная на вычислительной машине БЭСМ-6 с использованием алгоритмов самоорганизации (показаны некоторые связи).

Соответствующие прогнозы семи основных переменных модели показаны графически в табл. 21. Здесь же указаны соответствующие среднеквадратичные ошибки. Точность моделей характеризуется такими цифрами: для модели № 1 $\epsilon(2)_{\text{норм}} = 74,6\%$; модели № 2 $\epsilon(2)_{\text{норм}} = 57,7\%$; модели № 3 $\epsilon(2)_{\text{норм}} = 44\%$ и для модели № 4 $\epsilon(2)_{\text{норм}} = 39,3\%$.

Как видно, по точности прогноза наиболее точной оказалась модель № 4. Очевидно, преимущества модели № 4 по точности объясняются тем, что в первых двух моделях выделялся один тренд и определялся один остаток $F = 1$, т. е. в какой-то мере был нарушен принцип самоорганизации. Если бы $F = 10$ остатков припасовывались к $F = 10$ трендам (как это и следует делать), то модель № 3, по-видимому, была бы не менее точной, чем модель № 4.

Напомним, что сравнению подлежали два способа учета аргумента — времени. Нетрудно сделать вывод о том, что в данном примере выделение отдельного тренда снижает точность моделирования, а указание машине блоков структуры повышает ее. В качестве опорной функции можно рекомендовать уравнение регрессии, соответствующее модели при указании машине блоков структуры.

Если совсем исключить время как аргумент и не учитывать его, то точность модели упала бы приблизительно в два раза.

Приведем уравнения, синтезированные машиной, для модели № 4, которая является моделью без выделения отдельного временного тренда, но с учетом информации о структуре системы (для принятия решений в конце 1965 года), по критерию регулярности $\Delta(1) \rightarrow \min$.

Уравнения нормирования

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_i - \bar{\Phi}}{\bar{\Phi}}; \quad x_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\bar{X}}; \quad t_i = \frac{T_i - \bar{T}}{\bar{T}},$$

где $\bar{X}$ — среднее значение переменной X ; X_i — i -е значение переменной X ; x_i — нормированное значение переменной X .

Средние значения переменных X :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1 &= 84\,540; \quad \bar{\Phi}_2 = 23\,720; \quad \bar{X}_1 = 15\,280; \quad \bar{X}_2 = 3605; \\ \bar{X}_3 &= 38,81; \quad \bar{X}_4 = 15\,430; \quad \bar{X}_5 = 3805; \quad \bar{X}_6 = 328,8; \\ \bar{X}_7 &= 923,8; \quad \bar{X}_8 = 2025; \quad \bar{X}_9 = -70,69; \quad \bar{X}_{10} = 926,5; \\ \bar{X}_{11} &= 1345; \quad \bar{X}_{12} = 5832; \quad \bar{X}_{13} = 5726; \quad \bar{M}_1 = 1254; \\ \bar{M}_2 &= 870,5; \quad \bar{M}_3 = 3903; \quad T = 11,5. \end{aligned}$$

Элемент «Производство» (см. рис. 21):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} &= 0,05562 - 0,001642x_{12-2} + 0,000293x_{12-3} - 0,00328x_{13-2} - \\ &\quad - 0,0007382x_{13-3} + 0,05706\mu_{3-2} + 0,01468\mu_{3-3}, \end{aligned}$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,00005\%$;

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_5}{\Delta t} &= 0,7177 - 0,305x_{2-3} + 1,587x_{4-3} + 0,2836\mu_{2-0} - 0,5861\mu_{3-0} - \\ &\quad - 2,053\varphi_{1-0} + 3,763\varphi_{1-3} + 0,1949t_0 - 0,849t_{-3}, \end{aligned}$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,041\%$;

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_4}{\Delta t} &= 0,09107 - 0,0174x_{5-2} + 0,03507x_{5-3} + 0,0489x_{6-3} - 0,003742x_{12-2} + \\ &\quad + 0,112x_{12-3} - 0,04521x_{13-2} + 0,05171x_{13-3} + 0,02648\mu_{1-2} - 0,1744\mu_{3-2}, \\ \text{ошибка } \Delta^2(1) &= 0,0027\%; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta x_{13}}{\Delta t} = 0,2472 + 1,318x_{4-3} - 1,526x_{5-1} - 0,437x_{2-1} - 0,05554x_{12-2} + \\ + 0,5865x_{13-1} - 0,06792x_{13-3} + 0,1294t_{-3},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,052\%$.

Элемент «Некорпорированные производители»:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = 0,06731 + 0,001943x_{1-3} - 0,06137x_{4-3} + 0,0461x_{11-2} + 0,1223\varphi_{1-2} - \\ - 0,004842\varphi_{1-3} - 0,007028t_{-3} + 0,004542\mu_{3-3},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,0014\%$;

$$\frac{\Delta x_8}{\Delta t} = 0,154 - 0,01446x_{3-0} + 0,01518x_{3-1} + 0,4603x_{4-3} - 0,2334x_{7-2} - \\ - 0,00586\mu_{1-2} - 0,1343t_{-3},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,0014\%$.

Элемент «Корпорации»:

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t} = 0,1066 + 0,1269x_{2-0} + 0,1787x_{2-3} - 0,01317x_{5-0} + 0,04076x_{6-1} + \\ + 0,008932x_{7-0} - 0,004162x_{7-1} - 0,03358x_{7-2} - 0,2164x_{8-0} - 0,09939x_{8-1} - \\ - 0,004761x_{8-3} + 0,01498x_{11-0},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,041\%$;

$$\frac{\Delta x_{11}}{\Delta t} = 0,09423 + 3,778x_{1-0} + 0,0176x_{1-1} - 3,188x_{4-0} - 0,13x_{4-1} - \\ - 0,006247x_{6-0} + 0,05415x_{10-1} + 0,1275\mu_{2-2},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,1\%$.

Элемент «Правительство»:

$$\frac{\Delta x_7}{\Delta t} = 0,07323 + 0,3822x_{6-0} + 0,295x_{6-1} - 0,2021x_{8-1} + 0,002142x_{9-0} - \\ - 0,3819\mu_{1-0} - 0,4992\mu_{1-1} - 0,4886\mu_{2-0},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,42\%$.

Элемент «Банк»:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t} = 0,1265 + 0,0938x_{1-3} - 0,070773x_{2-3} + 0,4351x_{5-3} + 0,02786x_{6-3} - \\ - 0,01609x_{7-3} - 0,2491x_{8-2} + 0,2241x_{12-2} - 0,1641x_{13-2} - 0,1749\mu_{3-2} + \\ + 0,02848t_{-3},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,18\%$;

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t} = -1,681 - 41,25x_{2-0} - 24,6x_{7-1} + 0,0835x_{9-3} + 68,21x_{12-0} - \\ - 436,6\varphi_{2-0} + 62,45x_{13-0},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 4\%$.

Элемент «Зарубежные страны»:

$$\frac{\Delta \varphi_2}{\Delta t} = -0,003476 + 0,0008922x_{3-3} - 0,002597x_{9-2} - 0,004798x_{9-3} - \\ - 0,003184x_{10-2} + 0,01065x_{12-2} - 0,1509\varphi_{2-0},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,0034\%$;

$$\frac{\Delta x_{10}}{\Delta t} = 0,127 - 0,258x_{10-0} - 0,01639x_{10-2} + 0,0683x_{11-1} + 0,294x_{11-3} + \\ + 0,06613x_{13-0},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,21\%$;

$$\frac{\Delta x_{12}}{\Delta t} = 0,0563 + 0,1316x_{1-2} - 0,09656x_{1-3} + 0,01741x_{5-3} - 0,1572x_{10-2} - \\ - 0,03496x_{10-3} + 0,03653x_{13-3} + 0,04057\mu_{3-2} + 0,08617\mu_{3-3},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 0,0008\%$;

$$\frac{\Delta x_9}{\Delta t} = 0,322 - 0,465x_{9-0} - 0,03735x_{9-1} + 0,274x_{13-2} + 0,344\mu_{1-2} + \\ + 0,258\mu_{2-0} - 0,0621t_{-1} + 1,244t_{-2},$$

ошибка $\Delta^2(1) = 1,9\%$.

Заметим, что селекция уравнений прогнозирования по критериям несмещенности и баланса переменных еще не выполнялась. Эти критерии при значительном времени упреждения дают более точные прогнозы, чем критерий регулярности.

Исследование устойчивости экономической системы Англии при малых отклонениях. Для исследования устойчивости были использованы уравнения модели № 4, отличительная особенность которых заключается в большом числе запаздывающих аргументов, входящих в описание. Несмотря на то, что существует достаточно полная теория линейных систем с постоянными запаздываниями, в рамках которой вопрос устойчивости в теоретическом плане разрешен, практическое исследование устойчивости (особенно для сложных систем и систем с большим числом запаздывающих аргументов) представляет значительные трудности.

Эти трудности можно избежать, если при исследовании устойчивости принимать каждый запаздывающий аргумент в качестве новой, самостоятельной переменной. Причем для каждой такой переменной должно быть получено свое, дополнительное (в данном случае разностное, линейное) описание.

Такое преобразование исходной системы уравнений можно интерпретировать следующим образом. Для анализа устойчивости вместо системы с запаздывающими аргументами, характеристическое уравнение которой может иметь бесконечное число корней,

рассматривается обычное линейное описание с числом корней характеристического уравнения, равным порядку системы. Все корни λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) характеристического уравнения исходной системы лежат в полуплоскости $R_e \lambda < c$ и число этих корней, расположенных в вертикальной полосе $a \leq R_e \lambda \leq b$, где $a > -\infty$, конечно. Кроме того, корни преобразованной системы (дополненной уравнениями для запаздывающих аргументов) и исходной, оказывающие наибольшее влияние на динамику, совпадают. Следовательно, совпадают и степени устойчивости этих систем.

Существует два способа получения дополнительных уравнений запаздывающих аргументов:

- 1) обучение новых уравнений по таблице исходных данных и
- 2) применение исходных уравнений, записанных для моментов времени $t - L$, где t — текущее время, L — запаздывание (при этом индексы всех переменных изменяются на единицу).

Способ 1-й. Уравнение аргументов без запаздывания получено при помощи регрессионного анализа или по программам МГУА:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = & a_0 + a_1 x_{i0} + a_2 x_{i20} + \dots + a_m x_{im0} + a_{m+1} x_{i-1} + \\ & + a_{m+2} x_{i-2} + \dots + a_{2m} x_{i-2m} + a_{2m+1} x_{i-2} + a_{2m+2} x_{i-2} + \dots + \\ & + a_{3m} x_{i-2m} + a_{(L-1)m+1} x_{i-4} + a_{(L-1)m+2} x_{i-2L} + \dots + a_{4m} x_{i-L}. \end{aligned}$$

Уравнение запаздывающего аргумента

$$\frac{dx_i(-L)}{dt} = a_0 + a_1 x_{i0} + a_2 x_{i20} + \dots + a_{4m} x_{i-L},$$

где L, i — индексы запаздывания и номера аргумента соответственно, также можно получить при помощи регрессионного анализа, по таблице исходных данных.

Способ 2-й. Этот способ получения уравнения запаздывающего аргумента заключается в сдвиге индексов переменных. Например, из уравнения вида

$$\frac{dx_{i(-0)}}{dt} = a_0 + a_1 x_{i(-1)} + a_2 x_{i(-3)}$$

при помощи уменьшения всех индексов на единицу получим уравнение запаздывающего аргумента x_{i-1}

$$\frac{dx_{i(-1)}}{dt} = a_0 + a_1 x_{i(-2)} + a_2 x_{i(-4)}.$$

Индексы сдвига переменных показывают место считывания значений переменных в таблице исходных данных.

Ниже при исследовании устойчивости экономической системы Англии был использован второй способ, как более простой. В результате описание преобразованной системы содержит не 15, а 60 самостоятельных переменных.

Результаты вычисления корней характеристического уравнения изображены на рис. 33 для Z - и для S -плоскостей. Из положения корней следует, что экономика Англии в конце 1964 г. (время, для

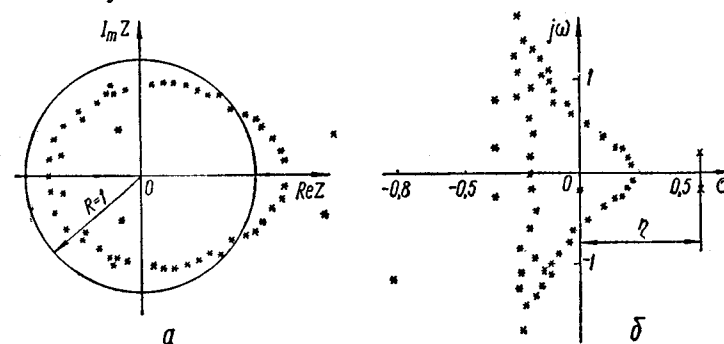


Рис. 33. Расположение корней характеристического полинома: а — на комплексной Z -плоскости; б — на комплексной S -плоскости ($S = \sigma + j\omega$).

которого составлялась модель № 4) была неустойчивой, поскольку не все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Однако степень неустойчивости экономической системы невелика (степень устойчивости $\eta = -\sigma_{\max} = -0,522$).

Глава IV

САМООРГАНИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ЭВМ

Основное фундаментальное открытие теории самоорганизации, как указывалось, состоит в том, что установлено существование минимума ряда эвристических критериев, обладающих свойствами внешнего дополнения (по Геделю), при постепенном усложнении математической модели. Именно существование такого минимума дает возможность передать вычислительной машине этап отыскания математической модели оптимальной сложности. Для среднеквадратической ошибки, определяемой на точках, используемых при оценке коэффициентов, такого минимума не существует и, следовательно, человек не может быть устранен из алгоритма синтеза модели по обычному регрессионному анализу.

Весьма важным достижением являлась также разработка способов усечения объема полного перебора при поиске указанного минимума машиной. Для этого предложено использовать многорядную процедуру массовой селекции по ряду критериев.

Многорядная селекция применена в задачах моделирования в функции времени и в функции многих других аргументов — координат системы. Например, селекция применена при синтезе гармонического тренда процесса в виде суммы большого числа гармоник с некратными периодами [50]. Для получения функций многих аргументов, кроме времени, многорядная селекция реализуется в виде алгоритмов МГУА.

Множественность критериев селекции, дающих экстремумы при усложнении модели, привела к идее целесообразного выбора критериев для каждого типа задач. Например, для решения задачи восстановления физического закона предложено использование критерия несмещенности.

ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ [ОТКРЫТИЯ] ЗАКОНОВ ИЛИ ОБЪЕКТИВНОЙ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Если исследуемый объект описывается одним алгебраическим или дифференциальным уравнением и изображается на схемах элементов с многими входами и одним выходом, без обратных связей, то рассматриваемую ниже задачу можно назвать задачей восстановления или открытия физического закона данного объекта.

Если объект описывается целой системой уравнений и изображается в виде сложных структурных схем, то вместо термина «открытие закона» лучше говорить об «объективной структурной идентификации». Таким образом, задачу объективной структурной идентификации в простых случаях можно назвать задачей восстановления или открытия физического закона (модели) объекта.

Под «восстановлением закона» понимается следующая процедура. Сам закон известен и задан в виде аналитической формулы. По этому закону рассчитывается ряд точек (около 15—20), после чего закон как бы «прячется» и считается до конца счета неизвестным. Затем по алгоритмам МГУА находится уравнение, отвечающее минимуму принятого внешнего дополнения — критерия селекции. Восстановленный закон сравнивается с исходным, и делается вывод о пригодности того или иного алгоритма МГУА и исходных данных для решения задачи восстановления закона.

Под «открытием закона» следует понимать ту же задачу, но в случае, когда исходный закон неизвестен, а таблицу данных берут из экспериментов на реальных объектах. При этом, в отличие от задачи восстановления, данные могут быть зашумлены помехами, что, конечно, затрудняет открытие закона и может привести к ошибочным результатам.

Под термином «физическая модель объекта» обычно понимают единственную модель, показывающую структуру причинно-след-

ственных связей в исследуемом объекте и численные значения коэффициентов этих связей. Физическая модель называется также законом или уравнением (системой уравнений), описывающим объект. Примеры открытия законов в объективной структурной идентификации даны в работе [24].

Продолжим рассмотрение задачи восстановления или открытия единственной физической модели объекта по небольшому числу не повторяющих друг друга экспериментальных точек (но не меньше пяти, так как чем больше точек, тем достовернее результаты). Как указывалось, распространенное утверждение о множественности моделей и невозможности абсолютной оценки гипотез является верным только при использовании одного критерия, например, критерия метода наименьших квадратов. Добавление любого (целесообразного или нецелесообразного) второго эвристического критерия приводит к единственной модели. Нецелесообразный выбор второго критерия (называемого критерием селекции) является до сих пор основным недостатком математического моделирования, причиной большинства его неудач и малой точности.

Примеры встречающихся в разных работах различных внешних дополнений даны в гл. I. Если в какой-либо работе получена единственная математическая модель, то это значит, что автор сознательно или интуитивно воспользовался какой-то информацией извне — вторым критерием выбора (селекции).

Сравнение двух критериев селекции в условиях наличия помех. В алгоритмах МГУА в качестве критерия селекции в большинстве случаев применяется критерий регулярности: среднеквадратичная ошибка на новых точках отдельной проверочной последовательности должна быть минимальной. Иногда [37] вместо квадратичной ошибки использовался критерий корреляции, что дает те же результаты. В указанных работах критерий регулярности применялся для восстановления законов в форме алгебраических или дифференциальных уравнений. Как указывалось, дифференциальные уравнения более устойчивы к зашумленным исходным данным.

Влияние помех (шумов) можно легко проследить на примерах, добавляя аддитивный бинарный шум в исходные данные. В результате такого опыта получим качественную картину, аналогичную рис. 34. Увеличение амплитуды шума снижает сложность (степень) модели, синтезируемой по алгоритмам МГУА. В случае использования в качестве критерия селекции среднеквадратичной ошибки на отдельной проверочной последовательности при увеличении помех в исходных данных минимум ошибки перемещается вверх и влево, т. е. в сторону уменьшения числа рядов селекции. При большой зашумленности данных синтезируются линейные уравнения регрессии, такие уравнения оказываются наиболее точными для прогнозов по зашумленным данным при большом времени упреж-

дения [39]. Можно сделать вывод, что критерий регулярности целесообразен при однократном прогнозе, но для открытия законов его можно применять только при малых помехах. Благодаря селекции по критерию регулярности можно для краткосрочного прогноза получить самую точную прогнозирующую модель, хотя часто она является «бессмысленной» с точки зрения физики объекта.

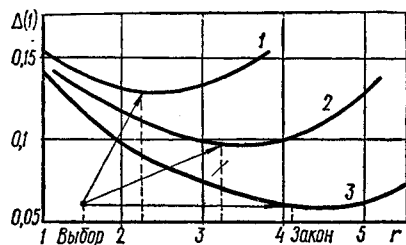


Рис. 34. График зависимости выбора математической модели по критерию регулярности от степени зашумленности исходных данных:
1 — большие помехи; 2 — средние помехи; 3 — шума нет.

Более устойчивым к помехам является критерий несмещенности коэффициентов (рис. 35). В этом случае при увеличении помех кривые также становятся более пологими, но минимум остается на одной абсциссе. При использовании в качестве второго критерия показателя несмещенности экстремум этого критерия всегда соответствует одному и тому же числу рядов селекции, хотя и перемещается вниз; при увеличении помех характеристика становится более пологой. Такое поведение экстремальных точек объясняет, почему наиболее точные уравнения прогнозирования при наличии шумов вовсе не соответствуют физической модели процесса, а также почему для открытия такой модели рекомендуется критерий несмещенности.

Критерий регулярности (точности на новых точках) эквивалентен критерию несмещенности только при малых помехах, поэтому для решения задачи открытия законов рекомендуется критерий несмещенности. Этот критерий также целесообразно применять для дифференциального системного многократного прогноза, так как он основан на последовательном интегрировании дифференциальных уравнений физической модели. При малых шумах в исходных данных критерий регулярности и критерий несмещенности равноценны и приводят обычно к одинаковому результату. При шумах критерий несмещенности имеет преимущество.

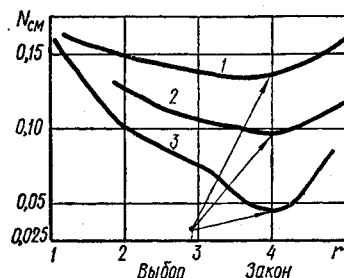


Рис. 35. График зависимости выбора математической модели по критерию несмещенности от степени зашумленности исходных данных:
1 — большие помехи; 2 — средние помехи; 3 — шума нет.

Вторым преимуществом критерия несмещенности для восстановления или открытия законов является то, что он менее чувствителен к выбору способа разделения исходных данных на обучающую и проверочную последовательности, так как способ регуляризации на абсциссу минимума не влияет. Теория целенаправленной регуляризации становится не столь важной.

Третьим преимуществом критерия несмещенности в указанных задачах является то, что в случае наличия в объекте внутренних обратных связей он не позволяет машине заменить одни аргументы комбинацией других, по правилам косвенного измерения переменных. Чтобы обеспечить самый точный прогноз, удовлетворяющий критерию регулярности, машина выбирает переменные, обеспечивающие большую точность отсчетов. Такими переменными являются те, характеристики которых в пространстве параметров образуют между собой углы, близкие к 90° . Если, например, в физическом законе участвуют два почти коллинеарных аргумента, то машина выбрасывает один из них и таким образом находит оптимальную прогнозирующую модель, а не физический закон. Физическая модель является оптимальной для прогноза только при отсутствии помех в исходных данных и внутренних обратных связей в объекте (для разомкнутых объектов). В других случаях прогнозирующая модель отличается от физической.

Критерий несмещенности в задаче восстановления и открытия законов при малых помехах действует так же, как критерий регулярности, дополненный критерием минимума числа аргументов (критерием простоты модели). По этим двум критериям предпочтение дается модели, имеющей более простой состав аргументов.

Если объекты разомкнуты и не содержат внутренних обратных связей, а помехи в исходных данных невелики, критерии регулярности и несмещенности дают одинаковые результаты. В случае несогласованности критериев предпочтение отдается модели, селектированной по критерию несмещенности, так как он обеспечивает большее упреждение прогноза.

Для сложных объектов с внутренними обратными связями, где возможно образование «дифференциальных вилок» косвенного измерения переменных, кроме указанных двух критериев, следует наложить еще условие минимума числа аргументов, хотя и при этом (в случае, когда забыт какой-нибудь аргумент закона) достаточность условий все же еще не достигается. Успех решения задачи открытия закона устанавливается по тому, достигнут глубокий минимум (малая величина в точке минимума) критерия селекции или нет.

Известно, например, что при синтезе структуры перцептрона критерий регулярности обеспечивает самый точный перцептрон.

Благодаря селекции по критерию инвариантности можно получить самый инвариантный перцептрон и т. п. Аналогично этому селекция по критерию регулярности приводит к самой точной прогнозирующей модели, а селекция по критерию несмещенности (при условии достижения глубокого минимума критериев) — к восстановлению или открытию физических законов или к решению задач структурной идентификации сложных объектов по экспериментальным данным.

Анализ глубины минимума критерия селекции. Задачи восстановления законов решаются машиной успешно при выполнении следующих условий:

при постепенном повышении сложности модели в области перебора машины участвует выражение, точно определяющее искомый закон. Процедура многорядной селекции направляет перебор в область, где имеется требуемое выражение;

исходные данные не зашумлены помехами, измерения достаточно точные;

число точек в исходной таблице достаточное (не менее 20—30-ти).

При выполнении этих условий критерий селекции проходит через нулевое значение (имеется «глубокий минимум»), значит, открытие закона достоверно.

Если же при постепенном повышении сложности модели глубокий минимум не получается, значит, указанные выше условия нарушены. Из этого еще не следует, что закон не открыт. Возможно, что уменьшение глубины минимума произошло из-за неточных исходных данных, но тем не менее минимум указывает закон.

Если же, например, нулевое значение минимума вызвано недостатком членов во всех предъявляемых выражениях или наличием в них излишних членов, то минимум уже не отвечает закону, а только указывает наиболее близкую к нему аппроксимацию. Коэффициенты при излишних членах не получаются равными нулю. В этом случае приходится применять специальную методику анализа глубины минимума, т. е. выяснять причины, почему нуль не был достигнут. Методика анализа глубины минимума еще только разрабатывается и состоит в выработке рекомендаций по целесообразному расширению области перебора, выполняемого машиной. Только получив достаточно глубокий минимум (порядка $n_{\text{см.норм}} \leq 0,05$), можно считать, что закон восстановлен или открыт.

МЕТОД САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Моделирование сложных объектов принципиально отличается от моделирования простых объектов: множество переменных, входящих в модель, точно не известно, а сами законы выражены

довольно сложными аналитическими функциями или дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами.

Под самоорганизацией (или «объективной идентификацией») математических моделей сложных объектов понимаются способы прямого получения полиномиальных (или других) уравнений регрессии оптимальной сложности по экспериментальным данным. Задание машине какой-либо априорной информации о закономерностях, связывающих элементы системы, не требуется. Достаточно только указать среду решения задачи (список возможных переменных) и вид опорной функции, который можно варьировать (подбирать).

Уравнение регрессии оптимальной сложности отвечает максимуму какого-либо критерия, например, максимуму точности, определяемой на отдельной проверочной последовательности данных. Эти уравнения представляют собой конечно-разностные (т. е. алгебраические) уравнения с запаздывающими аргументами.

Определяемый вид конечно-разностных уравнений, в левой части которых стоит аналог первой производной, называют дифференциальными уравнениями регрессии. При $\Delta t \rightarrow dt$ эти уравнения переходят в обычные уравнения первого порядка в нормальной форме Коши. Общее число дифференциальных уравнений регрессии равно числу независимых переменных, т. е. числу составляющих характеристического вектора. Число аргументов задается с избытком, но алгоритм самоорганизации оставляет только часть из них.

Запишем систему из m дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_m),$$

где $1 \leq i \leq m$.

Заменяя дифференциалы dx_i и dt на конечные разности Δx_i и Δt и используя, например, степенные полиномы Колмогорова — Габора в левых частях уравнений

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_m) = a_0 + \sum a_j x_j + \sum \sum a_{jk} x_j x_k + \dots,$$

получим систему из m дифференциальных уравнений регрессии. Коэффициенты этих уравнений можно определить по алгоритмам МГУА. Если выполнены указанные выше условия, то коэффициенты не существующих реально связей оказываются равными нулю (или очень малыми) и таким образом успешно восстанавливается математическая модель в виде системы дифференциальных (разностных) уравнений.

Машина может только выбирать, какие из указанных ей переменных или связей (коэффициентов) равны нулю, т. е. она действует только в сторону сокращения указанной ей предположительной

системы уравнений. Эту систему нужно указать «с запасом» переменных. Если число таких переменных окажется меньше числа действительно существующих, то это сразу обнаружится по величине среднеквадратичной ошибки (или другого критерия регулярности), отвечающей выбираемому по МГУА решению. Конечная ошибка МГУА (в точке «левого угла» на рис. 1) не должна быть больше определенной величины (около 5%).

Если часть элементов системы описывается алгебраическими уравнениями, а часть — разностными (дифференциальными) уравнениями первого порядка, то, исключая промежуточные переменные, можно найти систему, содержащую только дифференциальные уравнения первого порядка.

Методы МГУА применимы как для получения алгебраических, так и для получения дифференциальных уравнений регрессии. Таким образом, может быть найдена единственная структура данной сложной системы, а все коэффициенты связей определены по коротким выборкам экспериментальных данных.

Способы усечения объема перебора. Сложность вычислений (количество операций) увеличивается с возрастанием степени уравнения регрессии и, особенно, с увеличением числа аргументов. Применяются два способа уменьшения объема вычислений.

1. *Вычисление в два этапа.* На первом этапе для упрощения вычислений применяются только линейные полиномы. Затем оценивается величина их членов. Члены, которые по абсолютной величине слишком малы (меньше 5% суммы всех других членов), можно отбросить и таким образом уменьшить число аргументов.

На втором этапе записывают нелинейные полиномы Колмогорова — Габора для оставшихся наиболее важных аргументов.

2. *Комбинированный метод.* Чтобы еще больше упростить вычисления, нужно использовать больше априорной информации детерминированного типа. Так называемый комбинированный метод основан как на детерминированном подходе, так и на принципах самоорганизации. Это означает, что можно добавить некоторую достоверную информацию общего вида о структуре исследуемой системы. При этом структура должна быть взята «с запасом», который будет затем уменьшен методом самоорганизации.

В качестве дополнительной информации чаще всего указываются блочная структура объекта и списки переменных для каждого блока отдельно.

ПРОБЛЕМА УСРЕДНЕНИЯ ДАННЫХ

При синтезе математических моделей встречается весьма серьезное затруднение, связанное с тем, что переменные, участвующие в дифференциальных уравнениях (составленных обычным, детерминированным методом), представляют собой мгновенные значения некоторых физических величин, измеряемые в текущий момент времени в бесконечно малом объеме — точки пути. Реально можно получить только усредненные цифры за некоторый интервал времени и в некотором объеме пространства. Усредненные значения переменных значительно отличаются от их мгновенных значений.

Затруднение и состоит в том, что на практике почти никогда не имеется всех данных, необходимых для идентификации дифференциальных уравнений, получаемых обычным способом. Только если известны простые аналитические решения этих уравнений, можно попытаться использовать их для получения усредненных величин и таким образом выполнить идентификацию.

Полученные при помощи МГУА дифференциальные уравнения регрессии не вполне идентичны обычным дифференциальным уравнениям: в них участвуют усредненные значения переменных, а не мгновенные значения их в текущий момент времени. Именно поэтому решения больше отвечают тому, что требуется на практике от дифференциальных уравнений. Процедура решения уравнений регрессии не отличается от решения обычных дифференциальных уравнений, составленных для мгновенных значений.

Результатом решения дифференциальных уравнений регрессии являются усредненные кривые, поэтому их можно идентифицировать по реально существующим усредненным данным. Чем меньше интервал усреднения, тем они ближе к дифференциальным уравнениям, получаемым обычным, детерминированным способом. Проблема усреднения данных решается применением таких дифференциальных уравнений регрессии.

Уравнения регрессии могут связывать переменные с любыми (и даже с разными для каждой переменной) областями и интервалами усреднения. В этом случае проблемы усреднения данных не существует. Дифференциальные уравнения регрессии также связывают усредненные величины и этим отличаются от дифференциальных уравнений детерминированного подхода. При уменьшении области и интервала усреднения последние переходят в обычные дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения для усредненных значений легко использовать при прогнозировании по интервалам усреднения, год за годом, учитывая в начале каждого интервала новые начальные условия.

ИЕРАРХИЯ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧАХ ОТКРЫТИЯ ЗАКОНОВ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК

Согласно принципу самоорганизации, при постепенном увеличении сложности математической модели критерий селекции, обладающий свойствами внешнего дополнения (регуляризации), проходит через минимумы. Глобальный минимум целесообразно выбранного критерия селекции определяет собой модель оптимальной сложности.

При самоорганизации математических моделей специфичность остается только в выборе критерия селекции: выбор его должен

быть целенаправленным. Критерий выбирается соответственно типу решаемой интерполяционной задачи. Для идентификации характеристик объекта рекомендуются одни критерии, для синтеза перцептронов — другие, для прогнозирования — третьи и т. п.

При решении указанных задач важно пользоваться критерием, который, с одной стороны, плавно изменяется в функции сложности модели, а с другой, — дает глубокий минимум точно при модели, отвечающей искомому закону.

Плавность, позволяющая пропускать опробование некоторых моделей и, следовательно, применить многорядные алгоритмы селекции, достигается при использовании критерия регулярности, т. е. величины среднеквадратичной ошибки, измеряемой на точках отдельной проверочной последовательности. Плавность увеличивается, если ошибка определяется не для одной рекордной модели в каждом ряду селекции, а как средняя величина для всех моделей, селектируемых в данном ряду. При полном переборе по табл. 10 или 11 плавность изменения критерия не важна.

При неточных, зашумленных данных минимум критерия регулярности сдвигается в сторону более простых моделей (см. рис. 35). В этих условиях лучше воспользоваться критерием несмещенности. Критерий несмещенности не всегда дает плавную характеристику в зависимости от сложности модели. В этом следует применить критерий регулярности, как вспомогательный, для выбора некоторого количества моделей, из которых затем выбирается одна единственная модель оптимальной сложности по основному критерию — критерию несмещенности. Критерий регулярности подчинен критерию несмещенности как более важному. В свою очередь, критерий несмещенности может быть подчинен критерию баланса переменных.

Основным критерием селекции в данных задачах является критерий несмещенности либо критерий баланса переменных. Критерий регулярности (минимума среднеквадратичной ошибки на новых точках) используется как вспомогательный, дающий более плавную характеристику при нарастании сложности моделей, вследствие чего можно применять многорядную селекцию, а не полный перебор моделей.

Критерии регулярности. Для получения наиболее регулярного математического описания (модели) в качестве критерия селекции используются:

величина среднеквадратической ошибки, измеренной на новых точках отдельной проверочной последовательности данных,

$$\Delta(1) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N_{\text{пр}}} (\Phi_i^* - \Phi_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=N_{\text{пр}}} (\Phi_i^*)^2} \rightarrow \min,$$

где $\Delta(1)$ — относительная ошибка; Φ_i — полученное по модели значение выходной величины в i -й точке ($i = 1, 2, \dots, N_{\text{пр}}$); Φ_i^* — действительное значение выходной величины в той же точке. Чем меньше ошибка, тем модель более регулярна; коэффициент корреляции

$$K_{\Phi^*\Phi} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N_{\text{пр}}} (\Phi_i^* \Phi_i)}{\sum_{i=1}^{i=N_{\text{пр}}} (\Phi_i^*)^2} \rightarrow 1.$$

Чем ближе коэффициент корреляции к единице, тем модель регулярнее.

Изменения выходных величин в отдельных моделях могут отличаться как по величине среднего значения, так и по дисперсии. Для получения результатов, сравнимых для различных моделей, абсолютные величины Φ^* и Φ в приведенных выражениях следует заменить на централизованные и нормированные по среднему Φ^* и Φ . Тогда:

$$\varphi^* = \frac{\Phi^* - \bar{\Phi}^*}{\bar{\Phi}^*}; \quad \varphi = \frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\bar{\Phi}};$$

$$\Delta(1)_{\text{норм}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N_{\text{пр}}} (\varphi_i^* - \varphi_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=N_{\text{пр}}} (\varphi_i^*)^2} \rightarrow \min.$$

В программах, реализующих МГУА, используется несколько форм критерия несмещенности, две из которых описаны ниже.

Критерий несмещенности, основанный на анализе решений. Для расчета критерия несмещенности все имеющиеся экспериментальные точки ранжируются (т. е. располагаются в ряд) по величине дисперсии от среднего значения

$$D = \frac{1}{N_1 + N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_1 + N_2} \left(\frac{\varphi_i - \bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} \right)^2$$

и делятся на две части: точки с четными номерами образуют первую последовательность данных N_1 , точки с нечетными номерами — вторую последовательность N_2 .

По алгоритмам МГУА в конце каждого ряда селекции выбирается по F уравнений регрессии вида:

первый ряд $y = f(x_i, x_j)$;
второй ряд $z = f(y_i, y_j)$;

третий ряд $v = f(z_i, z_j)$;
 четвертый ряд $w = f(v_i, v_j)$ и т. д.

Рассмотрим алгоритм селекции по рядам.

Первый ряд селекции. Синтез уравнений выполняется два раза: сначала первая последовательность данных является обучающей, а вторая — проверочной:

$$N_1 = \text{Об}, N_2 = \text{Пр1}.$$

Полученные при этом уравнения регрессии обозначим $y_k^* = f(x_i, x_j)$;

затем, наоборот, первая последовательность служит проверочной, а вторая — обучающей:

$$N_1 = \text{Пр}, N_2 = \text{Об}.$$

Полученные при этом уравнения регрессии обозначим $y_k^{**} = f(x_i, x_j)$. Каждое из этих уравнений оценивается по величине средне-квадратичного различия указанных двух результатов синтеза, рассчитанного по всем точкам обеих последовательностей*:

$$n_{\text{см}} = \frac{1}{N_1 + N_2} \sum_{\tau=1}^{\tau=N_1+N_2} (y_{\tau}^* - y_{\tau}^{**})^2.$$

Из всех уравнений регрессии на первом ряду выбираются F уравнений, имеющих меньшую оценку $n_{\text{см}}$.

Критерий несмещенности для первого ряда селекции определяется как среднее значение показателей несмещенности для F отобранных самых несмещенных уравнений

$$N_{\text{см}} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{i=F} n_{\text{см}}.$$

В некоторых программах в качестве критерия используется лучшее значение $n_{\text{см}}$.

Второй и последующий ряды селекции. Последующие ряды селекции построены так же, как первый. Например, на втором ряду находят оценки несмещенности каждого из уравнений регрессии этого ряда:

$$n_{\text{см}_2} = \frac{1}{N_1 + N_2} \sum_{\tau=1}^{\tau=N_1+N_2} (z_{\tau}^* - z_{\tau}^{**})^2.$$

Критерий несмещенности второго ряда

$$N_{\text{см}_2} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{i=F} n_{\text{см}_2}.$$

* Такой прием несмещенности предложен инж. Б. К. Светальским.

Для третьего и последующих рядов действуют аналогичные формулы.

Ряды селекции наращиваются, пока критерий несмещенности падает $N_{\text{см}} \rightarrow 0$. Нулевое значение оценки несмещенности $n_{\text{см}}$ достигается только при отсутствии помех в исходных данных (правило остановки).

Критерий несмещенности, основанный на анализе коэффициентов. При этом критерии все имеющиеся точки также ранжируются по дисперсии и делятся на обучающую и проверочную последовательности, которые меняются местами: сначала точки с большей дисперсией идут в обучающую последовательность, затем наоборот. Особенность состоит в том, что ранжировка и разделение точек выполняются заново на каждом ряду селекции. Кроме того, свобода выбора уменьшается по рядам согласно формуле

$$F = \alpha_m - \beta S,$$

где F — число пропущенных переменных на данном ряду; S — номер ряда; m — число входных переменных; $\alpha = 1 \dots 5$; $\beta = 0,1 \dots 0,2$.

Уменьшение свободы выбора по рядам селекции дает возможность лучше использовать машину, т. е. ускорить решение задач большой размерности. При $\beta = 0$ число $F = \alpha_m = \text{const}$.

Для получения наиболее несмещенного математического описания на каждом ряду селекции используется безразмерный критерий несмещенности оценок коэффициентов модели:

$$n_{\text{см}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\xi} (a_i - b_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=\xi} a_i^2 + \sum_{i=1}^{i=\xi} b_i^2} \rightarrow 0,$$

где ξ — общее число коэффициентов $1 \leq i \leq \xi$; a_i — коэффициенты полиномов, полученные до перемены мест последовательностей; b_i — коэффициенты полиномов, полученные при перемене мест обучающей и проверочной последовательностей.

По этому критерию из ряда в ряд селекции пропускается F лучших, самых несмещенных переменных. Селекция продолжается до тех пор, пока несмещенность улучшается. Кроме описанных двух форм критерия несмещенности, применяется «критерий относительной несмещенности» $n_{\text{см}}$, описанный в гл. I. Чем меньше величина смещения коэффициентов $n_{\text{см}}$ в каждой модели, тем лучше, тем достовернее, что модель выражает физический закон.

Критерий несмещенности часто не дает достаточно плавной характеристики в функции сложности модели. Поэтому его следует применить либо совместно с критерием регулярности, либо в комбинаторных алгоритмах МГУА, где происходит полный перебор моделей и, следовательно, плавность не нужна.

ВЫБОР ФИЗИЧЕСКОГО ЗАКОНА СРЕДИ МНОЖЕСТВА САМЫХ ТОЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В случае исследования объектов с внутренними обратными связями* (содержащими усилители с большим коэффициентом усиления или интегральные элементы) машина, работающая по алгоритмам МГУА, выделяет несколько математических моделей, почти одинаково удовлетворяющих требования максимальной точности (регулярности) и несмещенности. Объясняется это тем, что благодаря обратным связям одни переменные могут быть заменены по схемам «косвенного измерения» другими переменными. Классическим примером может быть замена связи по возмущению так называемой «дифференциальной вилкой» [24].

При косвенном измерении одна переменная заменяется двумя, тремя и т. д. другими переменными. При этом меньшее число аргументов заменяется большим числом. Исходя из этого, введен еще один (вспомогательный), третий критерий выбора физической модели.

Критерий наименьшего числа аргументов. Из ряда математических моделей почти равной точности, прошедших с одинаковым успехом экзамен на несмещенность, следует в качестве физического закона выбрать более простую модель, с меньшим числом аргументов. К требованию несмещенности у самых точных моделей добавляется дополнительное требование — простота выражения. Недостаток этого критерия состоит в том, что он действует только в случае, когда все существенные аргументы закона не забыты и записаны в таблицу экспериментальных данных. Факт отсутствия существенного аргумента чаще всего обнаруживается по малой точности или большой смещенности моделей ($\Delta(1)_{\text{норм}} > 15\text{—}20\%$).

ВОЗМОЖНЫЕ НЕУДАЧИ МАШИННОГО СИНТЕЗА ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ

Машина не всегда успешно открывает закон. Если при экзамене на несмещенность минимальное смещение велико, то это указывает, что закон найти не удалось. Неудачи могут быть вызваны многими причинами, среди которых можно указать следующие:

в экспериментальных данных отсутствуют существенные переменные;

данные слишком зашумлены помехами;

в полном полиноме регрессии отсутствуют члены (или группа членов), достаточно точно выражающие закон; т. е. перебор, осу-

* Эти объекты описываются уравнением с зависимыми друг от друга аргументами. Для таких объектов наличие глубокого минимума критерия несмещенности является только необходимым, но не достаточным условием открытия закона.

ществляемый по алгоритму МГУА, должен включать в себя вариант модели, точно отвечающий искомому закону по виду опорной функции, числу членов и т. д.;

закон следует искать не в алгебраической, а в дифференциальной или интегральной форме.

Возможные ситуации, возникающие при открытии закона, более подробно показаны на примере закона $P = UI$ (табл. 22). В таблице знаками минус (—) отмечены ситуации, в которых машина приходит к отрицательному результату — «несмещенных зависимостей среди математических моделей нет».

Наиболее простой является задача открытия закона в случае полного комплекта аргументов при отсутствии шума и при наличии в области перебора машины моделей, точно выражающих закон. Задача усложняется при наличии шума (помех) и при отсутствии в полиноме соответствующих членов. Задача не может быть решена при неполном комплекте аргументов, необходимых для выражения закона.

Первую причину неудачи машинного синтеза можно устранить, только вводя в машину новые данные, учитывающие все существенные переменные. Если помехи не слишком велики, то наилучшим средством устранения их действия является округление коэффициентов. Применение критерия несмещенности также является средством устранения действия помех [39]. Третья причина устраняется перебором различных классов аналитических функций, используемых в уравнениях.

Благоприятным является тот факт, что для выражения законов применяются всего несколько видов опорных функций: полиномы, гармоника и экспоненты. Другие функции встречаются редко. Чем больше подходит опорная функция для выражения закона, тем меньше результирующее значение критерия селекции. Если глубокий минимум критерия селекции не достигается, то можно запрограммировать переход машины к другому виду уравнения регрессии или к другому набору переменных, что и предусматривается в общей программе, представляющей собой ряд последовательно опробуемых частных программ, отличающихся друг от друга по виду опорной функции и наборам аргументов.

Если нелинейность искомого закона такова, что он может быть выражен при помощи нескольких членов ряда Тейлора, и ряд быстро сходится, никаких особых трудностей не возникает; нужно только пользоваться полным степенным полиномом Колмогорова — Габора, чтобы получить несмещенные оценки коэффициентов закона, а не ограничивать степень регрессии. Если нелинейность не разлагается в быстро сходящийся ряд, то опорную функцию (полином) регрессии нужно заменить. Признаком такой ситуации служит малая глубина минимума критерия селекции.

Ситуации, встречающиеся при поиске физической

Восстанавливаемый закон и свойства уравнений регрессии		Полный	
		без помех	с помехами
1-я ситуация: В уравнении регрессии есть члены, точно выражающие искомый закон:	закон	$P = UI$ (+)	$P = UI$ (+)
	уравнение регрессии	$P = f(U, I)$	$P = f[(U + N), I]$
2-я ситуация: В уравнении регрессии нет таких членов:	закон	$U = \frac{P}{I}$ (-)	$U = \frac{P}{I}$ (-)
	уравнение регрессии	$U = f(P)$	$U = f[(P + N)]$

Примечание. Знаком (+) отмечены ситуации, когда машинное открытие закона

Четвертая причина неудачи машинного синтеза устраняется переходом к дифференциальным уравнениям регрессии вида

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Для идентификации такого рода уравнений величина $\Delta \varphi$ находится как приращение величины φ в таблице исходных данных (для соседних по времени замеров точек).

ОТКРЫТИЕ ЗАКОНОВ ПРИ ПОМОЩИ КОМБИНАТОРНОГО АЛГОРИТМА МГУА

Ранее, в работе [37], была сделана попытка показать способы открытия физических моделей сложных объектов при помощи селекции (самоорганизации) по необходимому условию: математическая модель должна быть самой регулярной (т. е. точной на новых точках). В данной работе добавляется еще второе условие: модель должна быть несмещенной. Для разомкнутых объектов без внутренних обратных связей условие несмещенности является достаточным.

Поиск закона происходит при помощи перебора всевозможных сочетаний его членов. Для усечения объема полного перебора используется принцип самоорганизации, реализуемый алгоритмами МГУА.

модели (аналитического закона)

Состав аргументов в экспериментальных данных			
Неполный		С излишними аргументами	
без помех	с помехами	без помех	с помехами
$P = UI$ (-)	$P = UI$ (-)	$P = UI$ (+)	$P = UI$ (+)
$P = f(U)$	$P = f(U + N)$	$P = f(U, I, t)$	$P = f[(U + N), I, t]$
$U = \frac{P}{I}$ (-)	$U = \frac{P}{I}$ (-)	$U = \frac{P}{I}$ (-)	$U = \frac{P}{I}$ (-)
$U = f(P)$	$U = f(P + N)$	$U = f(P, I, t)$	$U = f[(P + N), I, t]$

возможно; знаком (-) — когда машинное открытие закона невозможно.

Разработаны три новых алгоритма МГУА, направленных на решение задачи открытия законов в разомкнутых объектах. В комбинаторном алгоритме МГУА ряду степенных коэффициентов задаются нулевые значения и по указанным критериям перебираются всевозможные их комбинации. В упрощенном ортогонализированном алгоритме МГУА используется ортогональное наращивание полиномов. Варианты наращивания перебираются по тем же критериям. В модифицированном упрощенном ортогонализированном алгоритме МГУА увеличено разнообразие функций входных аргументов и используется критерий относительной несмещенности $n_{см}^*$.

Комбинаторный алгоритм МГУА отличается тем, что в качестве полного уравнения регрессии принимаются как симметричные (полные) степенные полиномы, так и все их возможные части — несимметричные полиномы (см. табл. 1, 10, 11). В последней части коэффициенты полных степенных полиномов заранее предполагаются равными нулю, причем используются все возможные варианты их месторасположения. Например, для двух аргументов x_1 и x_2 полный полином имеет шесть членов ($n = 2$):

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2.$$

Задавая нулевые значения тем или иным коэффициентам, можно получить 31 различных вид уравнений регрессии постепенно возрастающей сложности (см. табл. 1):

$$y_1 = z_1 + z_2;$$

$$y_2 = z_1 + z_3;$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= z_1 + z_2 + z_3; \\
y_4 &= z_1 + z_4; \\
y_5 &= z_1 + z_5; \\
&\dots\dots\dots \\
y_{31} &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6,
\end{aligned}$$

где $z_5 = a_4 x_1^2$; $z_6 = a_5 x_2^2$ — обобщенные переменные. Число членов полного полинома Колмогорова — Габора (в котором степень полинома равна числу аргументов) равно $W = C_{N+m}^m$, где N — число аргументов; m — степень полинома. Число уравнений регрессии, которое можно получить, задавая нулевые значения тем или иным коэффициентам,

$$V = \sum_{i=1}^{W-1} C_{W-1}^i = \sum_{i=0}^{W-2} 2^i = 2^{(W-1)} - 1.$$

Так, при двух аргументах получим $V = 31$ уравнение, при трех аргументах — $V_3 = 534\,287$, при четырех — $V_4 = 2^{69} \approx 10^{21}$ уравнений и т. д. При увеличении числа аргументов N и степени полинома m число возможных вариантов уравнений быстро возрастает. Уже при $m \geq 4$ и $N \leq 4$ это число очень большое, и даже современные ЭВМ (10^6 операций/с) не могут за приемлемый отрезок времени подсчитать все варианты. Для «усечения» числа вариантов приходится применять в программах принцип самоорганизации (селекции) наиболее точных уравнений.

При селектировании в качестве начального множества выбирается некоторое число (обозначаемое $2F$) членов полного симметричного полинома. Для примера, приведенного выше, обобщенные переменные — z_1, z_2, z_3 и z_4 , т. е. $2F = 4$. Из этих членов образуются всевозможные полиномы (от $y_1 = z_1 + z_2$ до $y_7 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$), число возможных вариантов которых $V_C = 2^{(2F-1)} - 1$.

Из полученных уравнений селектируются (по точности, измеряемой на проверочной последовательности данных) F самых точных уравнений. К ним прибавляется следующая «порция» обобщенных переменных (например, z_5 и z_6 при $F = 2$). Далее снова просчитываются все возможные варианты для расширенного множества z_i и выбираются F самых точных уравнений регрессии и т. д. Из ряда в ряд селекции проходят F уравнений. Так как общее число обобщенных переменных z_i равно $W = C_{N+m}^m$, то вышеизложенный цикл повторится всего $K = \left(\frac{C_{N+m}^m}{F} - 1 \right)$ раз. Число возможных вариантов, которые нужно опробовать при селекции,

$$V_{N,n}^C = K V_C = \left(\frac{C_{N+n}^n}{F} - 1 \right) (2^{2F-1} - 1).$$

Применяя принцип селекции, можно намного уменьшить число вариантов уравнений, что видно из отношения

$$\frac{V_{N,n}}{V_{N,n}^C} = \frac{2^{W-1} - 1}{\left(\frac{W}{F} - 1 \right) (2^{(2F-1)} - 1)} = \frac{2^W - 2}{\left(\frac{W}{F} - 1 \right) (2^{2F} - 2)}.$$

Например, для $N = n = 3$ и $F = 4$ получаем

$$\frac{V_{N,n}}{V_{N,n}^C} = \frac{2^{20} - 2}{\left(\frac{20}{4} - 1 \right) (2^8 - 2)} \dots \frac{2^{19} - 1}{4(2^7 - 1)} \approx \frac{2^{19}}{2^9}.$$

При использовании принципа селекции число вариантов уравнений уменьшилось в 2^{10} раз.

Пример 12. Открытие формулы расчета мощности постоянного тока при наличии помех. Проверка на несмещенность при помощи перестановки обучающей и проверочной последовательностей подтверждает, что самая точная формула $P = UI$ отвечает требованию несмещенности.

При наличии помех (табл. 23) для открытия закона требуется округление коэффициентов, так как из-за помех вместо нуля получаем 0,0001, вместо двух — 2,00003 и т. п.

Таблица 23

Исходные данные для открытия формулы мощности						
Вид последовательности	U	I	P	U^*	I^*	P^*
	Без помех			С помехами		
Обучающая	0,1	1,0	0,1	0,12	0,81	0,07
	0,3	1,9	0,57	0,42	1,97	0,69
	0,6	2,7	1,62	0,55	2,73	1,53
	1,0	3,4	3,4	1,0	3,44	3,33
	1,5	4,0	6,0	1,6	4,17	5,82
	2,1	4,5	9,45	1,92	4,38	9,37
Проверочная	2,8	4,9	13,72	2,92	4,9	13,73
	3,6	5,2	18,72	3,44	5,15	18,67
	4,5	5,4	24,3	4,62	5,14	24,48
	5,5	5,5	30,25	5,43	5,61	30,17
	0	0	0	0	0,03	0,04

После селектирования физического закона по критерию точности и проверки на несмещенность следует этап округления значений коэффициентов до трех-четырех цифр. Например, если коэффициент $a_0 = 0,27 \cdot 10^{-4}$, то его принимаем равным нулю. Этап округления значений коэффициентов необходим для окончательного устранения влияния помех после того, как это влияние уже сведено до весьма малой величины при помощи составления и решения системы нормальных уравнений.

В данном примере уравнение для подсчета мощности по экспериментальным данным с помехами получено в виде $P = 0,48 \cdot 10^{-4} + 1,00026 UI$. Ошибка на проверочной последовательности $\Delta(1) = 1,28\%$. После этапа округления значений коэффициентов закон восстанавливается правильно: $P = UI$.

Меры по устранению коллинеарности моделей и необусловленности матриц. Коллинеарность моделей возрастает от ряда к ряду селекции и приводит к необусловленности матриц нормальных уравнений. Практически это проявляется в отказе машины продолжать счет с выдачей сигнала «переполнение». Чем больше число разрядов машины, тем больше рядов селекции можно просчитать до появления этого сигнала. Минимум критерия селекции желательно достичь до него. В противном случае нужно применять специальные меры:

использовать переменные первого ряда x_i во всех последующих рядах селекции наряду с другими, промежуточными переменными y_i, z_i, v_i, w_i и т. д.;

применять в качестве критерия селекции критерий несмещенности. Необусловленность матриц приводит к повышению смещения, что и требуется обнаружить;

увеличивать сложность моделей по таблицам комбинаторного алгоритма МГУА (а не по закону многорядной селекции), где размерность матриц возрастает постепенно (см. табл. 10, 11).

Область применения комбинаторного алгоритма — открытие физических моделей, содержащих не более трех-четырех переменных. При большом числе переменных объем перебора (даже при использовании селекции полиномов по частям) приводит к громоздким вычислениям. В этом случае рекомендуются другие алгоритмы МГУА, применение которых показано ниже.

Требуются еще исследования по определению типа и уровня помех, при котором округление коэффициентов не помогает, закон не восстанавливается и т. п.

ОТКРЫТИЕ ЗАКОНОВ ПРИ ПОМОЩИ УПРОЩЕННОГО ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОГО АЛГОРИТМА МГУА

При наличии в законе 10—20 переменных рекомендуется применять так называемый упрощенный алгоритм МГУА. Этот алгоритм, сохраняя все характерные черты алгоритмов МГУА, свободен от ошибок, вызываемых коррелированностью промежуточных описаний.

Коллинеарность переменных увеличивается с каждым рядом селекции и приводит к росту числа необусловленных матриц частных полиномов. Использование переменных первого ряда X_i во всех рядах селекции, предусматриваемое в ортогонализированных алгоритмах МГУА, является основным способом, предотвращающим это явление. Обычно до четвертого-пятого ряда селекции можно

обойтись без ортогонализации, но при большом числе рядов селекции она необходима.

Упрощенный ортогонализированный алгоритм МГУА можно описать следующим образом. В многорядной процедуре последовательность усложнения математической модели частные описания S -го ряда имеют вид (см. «Ортогонализированные алгоритмы МГУА» в гл. I)

$$y_s = y_{s-1} + a_i z_i,$$

где

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{M[z_i, y_{s-1}]}{M[z_i^2]} y_{s-1};$$

$$a_i = \frac{M[\hat{z}_i, \varphi]}{M[\hat{z}_i^2]};$$

φ — выходная переменная; y_{s-1} — частное описание s -го ряда; z_i — обобщенная переменная, вводимая в модель на s -м ряду.

Выражение y_s — частный случай решения уравнения регрессии общего вида для двух переменных:

$$y_s = b_0 + b_1 y_{s-1} + b_2 \hat{z}_i.$$

Для центрированных переменных φ, y_{s-1}, z_i

$$M[\hat{z}_i, y_{s-1}] = 0.$$

Если, кроме того, y_{s-1} найдено методом наименьших квадратов по критерию

$$\delta_{s-1} = \sum_j (\varphi_j - y_{s-1,j})^2 = \min,$$

то

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = A_i = \frac{M[\hat{z}_i, \varphi]}{M[\hat{z}_i^2]}.$$

Ошибка регрессии в этом случае

$$\delta_s = \sum_j (\varphi_j - y_{s,j})^2 = \sum_j \varphi_j^2 - \sum_j y_{s-1,j}^2 - A_i^2 \sum_j \hat{z}_{ij}^2,$$

тогда

$$A_i^2 \sum_j \hat{z}_{ij}^2 \leq \sum_j \varphi_j^2 - \sum_j y_{s-1,j}^2.$$

Если переменные $\hat{z}_i, \varphi$ нормированы (т. е. $D[\hat{z}_i] = D[\varphi] = 1$), то

$$|A_i| = \sqrt{1 - k_{\varphi, y_{s-1}}^2}.$$

При увеличении числа аргументов $k_{\varphi, y_{s-1}} \rightarrow 1$ и $|A_i| \rightarrow 0$ процесс селекции математической модели становится более устойчивым, чем при непосредственном применении метода наименьших квадратов.

Обобщенные переменные z_i находят на s -м ряду селекции среди всех выходных переменных (независимо от того, вошли они в модель ($s - 1$)-го ряда или нет) и всех ковариаций входных признаков с обобщенными переменными, присутствующими в математической модели ($s - 1$)-го ряда. Этим достигается необходимая сложность модели. Напомним, что согласно основной идее МГУА восстанавливаются коэффициенты A_i на отдельной обучающей последовательности: *

$$A_i = \frac{\sum_{j_1} \hat{z}_{i,j_1} \varphi_{j_1}}{\sum_{j_1} \hat{z}_{i,j_1}^2},$$

где $j_1 \in G_1$, G_1 — множество точек обучающей последовательности, а каждое решение оценивается по величине ошибки

$$\Delta(1) = \sum_{j_2} (\varphi_{j_2} - \varphi_{s,j_2})^2,$$

где $j_2 \in G_2$, G_2 — множество точек проверочной последовательности.

По минимуму ошибки на проверочной последовательности отбирается несколько наилучших решений ($s - 1$)-го ряда, для каждого из которых строится множество решений s -го ряда. Наиболее точное на проверочной последовательности описание ($s + 1$)-го ряда определяет окончательный выбор обобщенной переменной, вводимой в модель на s -м ряду.

Пример 13. Открытие закона деструкции пестицидов.** С помощью упрощенного алгоритма МГУА была решена задача получения математической модели деструкции пестицидов.

Экспериментальный материал представлял собой 100 переходных процессов деструкции (разложения) 12 различных пестицидов на 10 культурах при 84 вариантах условий внешней среды. Типичный переходный процесс уменьшения концентрации пестицидов во времени показан на рис. 36.

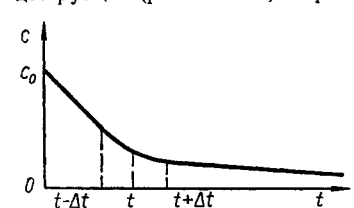


Рис. 36. Типовой процесс уменьшения концентрации пестицидов в растениях.

Экспериментальные данные выбирались таким образом, чтобы получить максимальное разнообразие сочетаний пестицидов, культуры и условий внешней среды. Пестициды были представлены 11-ю физико-химическими параметрами, 10-ю параметрами культуры и тремя параметрами, характеризующими внешнюю среду (условия применения).

Параметры пестицидов: x_1 — химический класс (дискретны 1—5); x_2 — молекулярный вес; x_3 — температура плавления ($^{\circ}\text{C}$); x_4 — летучесть (давление паров, Па); x_5 — растворимость в воде; x_6 — растворимость в органических растворах; x_7 — растворимость в жирах; x_8 — стойкость (рН = 6—8); x_9 — стойкость (рН > 8); x_{10} — стойкость (рН < 6); x_{11} — LD_{50} .

* Под «входными» переменными понимается совокупность возможных аргументов, предлагаемых для идентификации, и их обратных значений. Список входных аргументов задается, как правило, с избытком, так что оптимальная математическая модель (закон) может содержать только часть из них.

** Пример написан совместно с аспирантом С. Патерэу.

Параметры культур: x_{12} — рН культуры; x_{13} — содержание воды; x_{14} — общая кислотность; x_{15} — содержание белка; x_{16} — содержание жира; x_{17} — содержание клетчатки; x_{18} — содержание золы; x_{19} — содержание сахара; x_{20} — содержание азотистых веществ; x_{21} — содержание пектиновых веществ.

Условия применения: x_{22} — навеска пестицида в эксперименте; x_{23} — температура окружающей среды ($^{\circ}\text{C}$); x_{24} — начальная концентрация пестицида.

Из каждого графика переходного процесса взято по три точки с интервалом $\Delta t = 1$ сутки и составлена следующая система условных уравнений:

$$\varphi_j = f[X_j, c_{0j}, c_j(t), c_j(t - \Delta t)], \quad (j = \overline{1, 1}),$$

где X_j — вектор физико-химических параметров пестицида, культуры и условий применения j -го переходного процесса; c_{0j} — начальная концентрация пестицида; $c_j(t)$, $c_j(t - \Delta t)$ — значения концентрации пестицида в моменты времени t и $t = \Delta t$;

$$\varphi_j = \frac{c_j(t + \Delta t) - c_j(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

— приближенное значение скорости разложения в момент времени t .

Из экспериментальных наблюдений известно, что график изменения концентрации пестицида во времени представляет собой непрерывную гладкую кривую, поэтому возможно приближение

$$\frac{dc}{dt} = \frac{c(t + \Delta t) - c(t - \Delta t)}{2\Delta t}.$$

В результате решения системы уравнений получили

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = c(t) [A(x) + B(x) c(t)],$$

где

$$A(x) = 0,304 - 0,06136x_{14} - 0,01309x_{14}x_{22} + 0,1072x_7 - 0,01016x_{12}x_{23} - 0,229 \cdot 10^{-3}x_3x_{14} - 0,183 \cdot 10^{-3}x_7x_{22} - 0,74 \cdot 10^{-2}x_4x_7;$$

$$B(x) = -0,86 \cdot 10^{-5}x_{14} - 0,113 \cdot 10^{-5}x_{14}x_{22}.$$

Ошибка на обучающей последовательности составила $\Delta(\text{об}) = 0,87\%$, ошибка на проверочной последовательности — $\Delta(1) = 4,91\%$.

Среднее смещение коэффициентов конечного уравнения регрессии на обучающей и проверочной последовательности $n_{\text{см}} = 6\%$, максимальное относительное смещение $n_{\text{см max}} = 8,3\%$. Исходные данные приведены в табл. 24.

В оптимальном уравнении машина выбрала следующие наиболее влияющие аргументы: x_3 — температура плавления пестицида; x_4 — летучесть пестицида; x_7 — растворимость в жирах; x_{14} — общая кислотность культуры; x_{12} — рН культуры; x_{22} — навеска пестицида в эксперименте; x_{23} — температура окружающей среды.

Для случая

$$\frac{dA(x)}{dt} = \frac{dB(x)}{dt} = 0$$

в каждой отдельной реализации переходного процесса уравнение интегрируется. В результате получим закон деструкции

$$c(t) = \frac{c_0 e^{A(x)t}}{1 + c_0 \frac{B(x)}{A(x)} (1 - e^{A(x)t})}.$$

Исходные данные для открытия закона

№ переходного процесса	Параметры													
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
1	1	229	51	$8,5 \times 10^{-5}$	39	3	2	2	1	2	250	2,5	79	0,3
2	1	229	51	$8,5 \times 10^{-6}$	39	3	2	2	1	2	250	2,5	79	0,3
3	1	229	51	$8,5 \times 10^{-6}$	39	3	2	2	1	2	250	2,5	79	0,3
4	1	220	51	$8,5 \times 10^{-6}$	39	3	2	2	1	2	250	2,5	88	5,6
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
99	5	1200	60	10^{-6}	0,001	3	3	9	3	3	450	3,2	81	0,7
100	1	320	175	2×10^{-5}	0,1	3	2	2,5	1	2	200	2,1	100	—

Полученный закон удобен для практических расчетов. Действительно, вычислив значения $A(x)$ и $B(x)$ и зная начальную концентрацию c_0 , легко подсчитать значение концентрации в любой заданный момент времени, или, зная допустимую конечную концентрацию, вычислить время, необходимое для ее достижения.

ОТКРЫТИЕ ЗАКОНОВ ПРИ ПОМОЩИ МОДИФИКАЦИИ УПРОЩЕННОГО ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОГО АЛГОРИТМА МГУА

В модифицированном упрощенном алгоритме, как и в упрощенном ортогонализированном алгоритме МГУА, вид частных описаний задается выражением $y_s = y_{s-1} + A_i \hat{z}_i$. Однако от предыдущего модифицированный упрощенный алгоритм МГУА отличается использованием другого критерия селекции (используется относительный критерий несмещенности вместо критерия регулярности), а также генерацией большего разнообразия частных описаний.

Коэффициент относительной несмещенности оценок. Для каждого обобщенного аргумента на s -м ряду селекции модели коэффициент вычисляется отдельно как для обучающей, так и для проверочной

Таблица 24

деструкции пестицидов

пестицидов													
x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	c_0	$c(t)$	$c(t_0)$	Φ	
1,6	0,6	4,4	0,7	6	0,3	7	50	18	10	4,8	6,0	—0,8	
1,6	0,6	4,4	0,7	6	0,3	7	50	37	10	2,4	3	—0,2	
1,6	0,6	4,4	0,7	6	0,3	7	30	18	6	2,6	3	—0,3	
0,9	0,3	0,5	0,5	2,06	0,3	1,12	50	37	3,3	0,27	0,3	—0,02	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
0,9	0,6	0,6	0,49	11,8	0,46	1,4	50	20	50	21	24	—2,0	
—	—	—	—	—	—	—	20	20	50	50	16,2	—1,0	

последовательностей. Отбор «перспективных» аргументов осуществляется по минимуму относительного расхождения оценок:

$$n_{cm}^* = \left| \frac{A_i^* - A_i^{**}}{A_i^*} \right|,$$

где A_i^* и A_i^{**} — оценки коэффициента a_i , полученные на обучающей и проверочной последовательностях соответственно.

Процесс селекции. На первом ряду селекции самое наилучшее несмещенное описание находят следующим образом.

Среди множества входных аргументов $\Gamma_1^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ отбирается по критерию минимума n_{cm}^* подмножество $R_1^{(1)} (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_m^{(1)})$. Пусть, например, для какой-то конкретной задачи $R_1^{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_{19})$. Затем строится новое множество $\Gamma_1^{(2)}$ обобщенных аргументов, элементы которого — произведения элементов множеств $\Gamma_1^{(1)}$ и $R_1^{(1)}$. По критерию несмещенности из множества выделяется подмножество $R_1^{(2)}$. Например, $R_1^{(2)} = (x_1 x_3, x_7 x_8, x_9 x_{19})$.

Аналогично можно получить $\Gamma_1^{(3)} = R_1^{(2)} \times \Gamma_1^{(2)}$ и т. д. После выполнения l циклов расширения «входного» описания получаем $\Gamma_1 =$

Исходные данные для открытия закона Онзагера

Ряды селекции	Параметры электролита					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	φ
1	239	0,240	298,4	81,98	9,9	222,7
2	344	0,418	298,6	75,36	10,49	315,8
3	259	0,347	297,1	86,86	9,85	207,2
4	321	0,305	298,2	80,94	10,47	291,3
...	...	...	...	...	...	...
79	281	0,368	296,7	76,06	9,25	266
80	340	0,481	297,9	83,62	9,22	321

Ниже это показано на примере открытия закона Онзагера (из области электрохимии) [14]. Этим законом (за открытие которого автору была присуждена Нобелевская премия за 1968 г.) устанавливается значение эквивалентной электропроводности Λ_c слабонасыщенных растворов с малой валентностью z и растворителей с высокими диэлектрическими постоянными D :

$$\Lambda_c = \Lambda_0 - [A + B\Lambda_0] \sqrt{c(z_+ + z_-)},$$

где Λ_0 — эквивалентная электропроводность электролита при бесконечном разбавлении; c — концентрация электролита; z_+ , z_- — валентности ионов электролита:

$$A = \frac{9,15(z_+ + z_-)}{(DT)^{3/2}}; \quad B = \frac{9,9 \cdot 10^5}{(DT)^{1/2}} W;$$

$$W = z_+ z_- \frac{2q}{1 + q^{1/2}}; \quad q = \frac{z_+ z_-}{(z_+ + z_-)} \cdot \frac{(\lambda_+ + \lambda_-)}{(z_+ \lambda_- + z_- \lambda_+)};$$

T — абсолютная температура раствора; λ_+ , λ_- — ионные электропроводности.

Если экспериментальные данные лежат в указанной выше области, то машина восстанавливает точно форму закона, открытого Онзагером, добавив еще одну незначительную поправку (четвертый член).

В табл. 25 приведены исходные данные для области малой концентрации при одно-двухвалентных электролитах, где $z_+ = z_- = 1$. По этим данным, пользуясь описанной выше программой, получили следующее уравнение:

$$y = a_1 x_1 + a_2 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}} + a_3 \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4 x_5}} + a_4 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}} + a_5 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}} +$$

$$+ a_6 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}} + a_7 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}} + \dots + a_8 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}}.$$

$= \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)} \dots \cup \Gamma_1^{(n)}$, из которого по тому же критерию несмещенности выделяем подмножество $R_1 = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ перспективных аргументов первого ряда. Например, $R_1 = (x_1, x_7, x_8, x_{14}, x_{19})$. Окончательный выбор наилучшей переменной первого ряда z_s выполняется (по аналогии с соответствующим приемом упрощенного алгоритма МГУА) на втором ряду селекции по минимуму относительного расхождения коэффициентов $\hat{a}_i$ и $\hat{a}_i^*$ моделей второго ряда. Наилучшее (самое несмещенное) уравнение первого ряда имеет вид $y_1 = \hat{a}_1^* \hat{z}_s$, где $\hat{z}_s$ — центрированный относительно точек обучающей последовательности обобщенный аргумент.

Расширенное входное описание второго ряда усложнения модели Γ_2 находят тем же способом, что и расширенное описание первого ряда Γ_1 . Отличие состоит только в том, что

$$\Gamma_2^{(1)} = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(1)} \times R_1.$$

К входным аргументам первого ряда добавляются их ковариации с перспективными аргументами $z_i \in R_1$. На произвольном s -м ряду селекции

$$\Gamma_s^{(1)} = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(1)} \times (R_1 \cup (R_2 \cup \dots \cup R_{s-1})).$$

Как и в основном алгоритме МГУА, селекция модели происходит по минимуму среднеквадратичной ошибки на проверочной последовательности, а окончательный выбор модели оптимальной сложности по основному критерию несмещенности. Это объясняется тем, что критерий минимума среднеквадратичной ошибки (критерий регулярности) дает более плавную характеристику в функции сложности модели, чем критерий несмещенности. Поэтому его можно использовать в качестве вспомогательного критерия.

По своим возможностям, а также по способу получения окончательного решения модифицированный упрощенный алгоритм МГУА занимает промежуточное положение между упрощенным и комбинаторным алгоритмами.

Рассмотрим пример применения модифицированного ортогонализированного алгоритма.

Пример 14. Открытие закона Онзагера *. Большое значение для результата вывода закона по экспериментальным данным имеет диапазон, в котором собраны эти данные. Многие законы в физике и химии можно сформулировать так: «следствие пропорционально причине». Примерами могут служить закон Ома (в электротехнике) или закон Гука (в механике). Однако линейный характер закона сохраняется только в небольшой линейной области. Например, закон Гука «Растяжение образца пропорционально приложенной силе» действует только в области пластичности. Из этого следует, что результат синтеза некоторого закона на машине будет разным в зависимости от диапазона представленных экспериментальных данных.

* Пример написан совместно с аспирантом О. И. Шелудько.

Таблица 26

Процесс поиска членов закона Онзагера
на вычислительной машине

Расши- рение входного описания	Номер ряда			
	1	2	3	4
1	$\boxed{x_1}$	$x_1 \sqrt{x_2}$	$\sqrt{x_2}$	$\boxed{\frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}}}$
2	$\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_4}}$	$\frac{\sqrt{x_2}}{x_5}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_2^3}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}}$
3	$\frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_4^3}}$	$\boxed{\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4 x_5}}}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_2^3}}{\sqrt{x_2^2 (x_3 x_4)^3}}$
4	$\frac{x_1 \sqrt{x_2}}{x_2}$	$\boxed{\frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}}}$	$\frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\sqrt{x_3 x_4 x_5}}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_2^5}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}}$
5	$\frac{x_1 x_2}{x_2}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_1 \sqrt{x_2}}}{\sqrt{x_3 x_4}}$	$\frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\sqrt{x_1 x_3 x_4 x_5}}$	$\frac{x_1 \sqrt{x_2^5}}{\sqrt{x_4^4 (x_3 x_4)^3}}$

Примечание. Члены закона, соответствующие наиболее оптимальной модели, выделены рамкой.

Начиная с пятого ряда селекции, усложнения модели не происходит, а критерий несмещенности больше не уменьшается. Пятый член полинома повторяет (с другим коэффициентом) второй член, шестой — четвертый и т. д. Это означает, что закон можно выразить в замкнутой форме, пользуясь всего четырьмя членами. Вычислительная машина «открыла» оптимальный вид уравнения на четвертом ряду селекции (самоорганизации), и в дальнейшем происходит лишь уточнение числовых значений коэффициентов.

Окончательный вид уравнения, полученного на машине БЭСМ-6,

$$y = 1,003x_1 - 8,09 \cdot 10^5 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}} - 82,61 \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4}} + 9,35 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}}.$$

Последний член полинома во всем диапазоне изменения переменных невелик:

$$\left| 9,35 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4^3}} \right| \leq 0,0179.$$

Для сравнения приведем теоретический вариант уравнения Онзагера:

$$y = x_1 - 8,2 \cdot 10^5 \frac{x_1 \sqrt{x_2}}{\sqrt{(x_3 x_4)^3}} - 82,4 \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3 x_4 x_5}},$$

где $x_1 = \Lambda_0$; $x_2 = c$; $x_3 = T$; $x_4 = D$; $x_5 = \gamma$; $y = \Lambda_c$.

В табл. 26 показан процесс поиска вычислительной машиной оптимального вида модели (для простоты в таблице на каждом ряду селекции показана лишь

Таблица 27

Описание первого ряда селекции модели

Номера обобщенных переменных	Вид переменных	Номера обобщенных переменных	Вид переменных
1	x_1	11	$1 / x_1$
2	x_2	12	$1 / (x_3 x_4)$
3	x_3	13	$1 / \sqrt{(x_3 + x_4)}$
4	x_4	14	$1 / \sqrt{x_4}$
5	x_5	15	$1 / x_3$
6	$\sqrt{x_1}$	16	$1 / \sqrt{x_1}$
7	$\sqrt{x_2}$	17	$\sqrt{x_2} / x_5$
8	$\sqrt{x_3}$	18	$1 / \sqrt{x_3}$
9	$\sqrt{x_4}$	19	$1 / x_4$
10	$\sqrt{x_5}$	20	$1 / \sqrt{x_2}$

та ветвь расширения входного описания, которая оказалась на следующем ряду наиболее эффективной).

В табл. 27 приведено входное описание первого ряда селекции модели.

Точность на обучающей последовательности составила $\Delta(об) = 0,43\%$, на проверочной — $\Delta(1) = 1,8\%$. Максимальная относительная смещенность коэффициентов $n_{см\max}^* = 1,34\%$, средняя смещенность $n_{см}^* = 0,57\%$.

Вопросы исследования устойчивости и степени стабильности экологических систем являются темой многих работ последнего времени. Во многих работах указывается, что для исследования устойчивости как при малых отклонениях (устойчивость в «малом», по терминологии теории колебаний), так и при больших (глобальная устойчивость «в большом»), следует применить аппарат основоположной теории устойчивости А. М. Ляпунова, широко используемой в технике, в частности, в теории автоматического регулирования.

Рассмотрим простейшие способы исследования устойчивости экологических систем на основе применения прямого моделирования сложных систем по экспериментальным данным методами самоорганизации.

Если ограничиться пока рассмотрением только систем с сосредоточенными параметрами, то любая экосистема, или отдельная ее часть, может быть описана системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающими аргументами:

[illegible]

Здесь первый индекс аргумента указывает номер переменной, а второй — запаздывание, с которым она измеряется.

Характеристический вектор системы имеет ограниченное число m переменных: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$. Функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ удоб-

но выражать при помощи полных степенных полиномов Колмогорова — Габора.

Указанная математическая модель (общее описание) может быть получена по МГУА как для всей экосистемы, так и для отдельных ее частей, например, для отдельного трофического звена (модель фитопланктона, среды и т. п.).

Устойчивость динамической системы при малых отклонениях. Рассмотрим основные положения теории устойчивости Ляпунова, широко применяемые в теории колебаний, особенно в теории автоматического регулирования.

Одно из основных положений этой теории состоит в том, что устойчивость нелинейной системы при малых отклонениях точно определяется свойствами корней системы линейных уравнений первого приближения следующего вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv_1}{dt}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_{1,0}}\right) v_{1,0} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_{1,-1}}\right) v_{1,-1} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_{1,-T}}\right) v_{1,-T} + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_{m,0}}\right) v_{m,0} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_{m,-1}}\right) v_{m,-1} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_{m,-T}}\right) v_{m,-T}; \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_{1,0}}\right) v_{1,0} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_{1,-1}}\right) v_{1,-1} + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_{1,-T}}\right) v_{1,-T} + \\ &+ \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_{m,0}}\right) v_{m,0} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_{m,-1}}\right) v_{m,-1} + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_{m,-T}}\right) v_{m,-T}; \\ &\dots \dots \dots \\ \left(\frac{dv_m}{dt}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_m}{\partial v_{1,0}}\right) v_{1,0} + \left(\frac{\partial f_m}{\partial v_{1,-1}}\right) v_{1,-1} + \dots + \left(\frac{\partial f_m}{\partial v_{m,-T}}\right) v_{m,-T}. \end{aligned}$$

Частные производные в уравнениях первого приближения — постоянные коэффициенты линеаризации, равные тангенсам наклона касательной к нелинейной характеристике в данной точке наблюдения системы. Для каждой точки линеаризации значения частных производных в общем случае изменяются, следовательно, изменяется и устойчивость. Только для линейных систем они оказываются действительно постоянными и не меняются для любой точки линейных характеристик. Указанную выше линейную систему уравнений можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv_1}{dt}\right)_0 &= a'_{1,0}v_{1,0} + a'_{1,-1}v_{1,-1} + \dots + a'_{1,-k}v_{1,-T} + \\ &+ \dots + a'_{m,0}v_{m,0} + a'_{m,-1}v_{m,-1} + \dots + a'_{m,-k}v_{m,-T}; \\ \left(\frac{dv_2}{dt}\right)_0 &= a''_{1,0}v_{1,0} + a''_{1,-1}v_{1,-1} + \dots + a''_{1,-k}v_{1,-T} + \\ &+ \dots + a''_{m,0}v_{m,0} + a''_{m,-1}v_{m,-1} + \dots + a''_{m,-k}v_{m,-T}; \end{aligned}$$

$$+ \ddot{a}_{m,0} v_{m,0} + \ddot{a}_{m,-1} v_{m,-1} + \dots + \ddot{a}_{m,-k} v_{m,-k};$$

$$\left(\frac{dv_m}{dt} \right)_0 = \ddot{a}_{1,0} v_{1,0} + \ddot{a}_{1,-1} v_{1,-1} + \dots + \ddot{a}_{1,-k} v_{1,-k}.$$

Здесь частные производные обозначены буквами $a_{i,(-j)}$, поскольку они для заданной точки линеаризации постоянны.

В работе А. Ляпунова системы с запаздывающими аргументами не рассматриваются. Поэтому, чтобы применить его теорему об устойчивости при малых отклонениях, необходимо (для систем с ограниченным последствием, т. е. при $k = \text{const}$) расширить число переменных, рассматривая каждый сдвиг переменной как отдельную новую переменную. Введем обозначения: $x_1 = v_{1,0}$; $x_2 = v_{1,-1}$; $x_3 = v_{1,-2}$, ..., $x_{k+1,m} = v_{m,-T_L}$. Число наблюдаемых отдельных переменных увеличилось в $T_L + 1$ раз (вместо m переменных v — $(k+1)m$ переменных x). Уравнения первого приближения Ляпунова для нового расширенного множества переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \dot{a}_{10} x_1 + \dot{a}_{20} x_{(k+1)+1} + \dots + \dot{a}_{m0} x_{(k+1)(m-1)+1} + \\ &+ \dot{a}_{1-1} x_2 + \dot{a}_{2-1} x_{(k+1)+2} + \dots + \dot{a}_{s-1} x_{(k+1)(m-1)+2} + \\ &+ \dots + \dot{a}_{1-k} x_{k+1} + \dot{a}_{2-k} x_{(k+1)+k+1} + \dots + \dot{a}_{m-k} x_{(k+1)m}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \ddot{a}_{10} x_1 + \ddot{a}_{20} x_{(k+1)+1} + \dots + \ddot{a}_{m0} x_{(k+1)(m-1)+1} + \dots + \\ &+ \ddot{a}_{1-1} x_2 + \ddot{a}_{2-1} x_{(k+1)+2} + \dots + \ddot{a}_{s-1} x_{(k+1)(m-1)+2} + \\ &+ \dots + \ddot{a}_{1-k} x_{k+1} + \ddot{a}_{2-k} x_{(k+1)+k+1} + \dots + \ddot{a}_{m-k} x_{(k+1)m} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_{(k+1)}}{dt} &= \ddot{a}_{10}^m x_1 + \ddot{a}_{20}^m x_{(k+1)+1} + \dots + \ddot{a}_{m0}^m x_{(k+1)(m-1)+1} + \\ &+ \dots + \ddot{a}_{m-k}^m x_{(k+1)m}. \end{aligned}$$

Получили систему дифференциальных уравнений первого порядка, в нормальной форме Коши, без запаздывающих аргументов.

Теперь можно применить теорему Ляпунова. Исключая промежуточные переменные (т. е. решая систему уравнений относительно любой, произвольно выбранной переменной), получим линейное дифференциальное уравнение динамики всей системы в целом:

$$\begin{aligned} \frac{d^{(k+1)m} x_i}{dt^{(k+1)m}} + a_1 \frac{d^{(k+1)m-1} x_i}{dt^{(k+1)m-1}} + \dots + a_{(k+1)m-2} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \\ + a_{(k+1)} \frac{dx_i}{dt} + a_{(k+1)m} = 0. \end{aligned}$$

Для всех переменных x_i это уравнение будет одним и тем же. Обозначая оператор дифференцирования буквой $p = \frac{d}{dt}$, получим так называемое характеристическое уравнение:

$$p^{(k+1)m} + a_1 p^{(k+1)m-1} + a_2 p^{(k+1)m-2} + \dots + a_{(k+1)m+2} p^2 + a_{(k+1)m-1} p + a_{(k+1)m} = 0.$$

Теорема Ляпунова утверждает, что для устойчивости исходной нелинейной системы при сколь угодно малых отклонениях все корни характеристического уравнения должны иметь отрицательную действительную часть. Однако при исследовании устойчивости систем высокого порядка обычно не находят корни характеристического уравнения. Критерий Гурвица—Рауса (или другие критерии, разработанные в теории автоматического регулирования) позволяет найти соотношения коэффициентов характеристического уравнения, обеспечивающие отсутствие нулевых корней и корней с отрицательной действительной частью. Например, для характеристического уравнения третьей степени

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

условие устойчивости Гурвица—Рауса имеет вид

$$a_2 a_1 > a_0.$$

При таком соотношении коэффициентов исходная нелинейная система третьего порядка устойчива (согласно теории Ляпунова) при малых отклонениях от равновесия, так как все три корня имеют отрицательные действительные части.

Выясним, как получить нелинейное дифференциальное уравнение прямым методом, по ряду заданных узлов интерполяции — точек наблюдения.

Наиболее удобным (и, по-видимому, единственно возможным) является Метод Группового Учета Аргументов (МГУА). Метод применим как для получения нелинейных уравнений (оптимальной сложности) с запаздывающими аргументами, так и непосредственно линейных дифференциальных уравнений первого приближения. Чтобы получить линейные дифференциальные уравнения регрессии, достаточно использовать в алгоритмах МГУА линейные частные описания.

Исследование степени стабильности. Степень стабильности системы характеризуется величиной наименьшей действительной части корня характеристического уравнения, выбранного из всех его корней λ_i . Допустим, имеется нелинейная система третьего порядка, линейное характеристическое уравнение которого имеет вид

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_0 = 0.$$

Корни этого уравнения можно найти по формуле Кардана или другими методами [43]. Пусть $\lambda_1 = c_1 + j c_2 = -0,01 + j 10$; $\lambda_2 =$

$= c_1 - jc_2 = -0,01 - j10$; $\lambda_3 = c_3 = -0,1$ (комплексные корни обязательно являются сопряженными комплексными числами).

Степень стабильности системы $c_{12} = -0,01$. Решение уравнения:

$$x_i(t) = A_0 + A_1 e^{-0,1t} + A_2 e^{-0,01t} (\sin 10t).$$

Из этого уравнения следует, что синусоидальная составляющая будет затухать медленнее других с показателем $-0,01$. В этом и состоит смысл определения степени стабильности. Графически на комплексной плоскости каждому корню отвечает точка (см. рис. 37). Степень стабильности равна расстоянию корня с наименьшей действительной частью до оси мнимых величин. Заметим, что оптимальная настройка динамических систем не всегда соответствует минимальной устойчивости. В автоматике [18] оптимальная настройка следящих систем второго порядка достигается при коэффициенте затухания $t = 0,25$, а не при $c = 1,0$.

Рис. 37. Расположение корней на комплексной плоскости (c_{12} — степень стабильности).

Обратим внимание на различие понятий «степень устойчивости» и «степень стабильности». Устойчивость есть свойство системы, определяемое всеми корнями характеристического уравнения. Степень стабильности — характеристика наиболее «неблагоприятного» корня, которая показывает затухание основной гармоника свободных колебаний системы. Именно степень стабильности ближе всего к понятию «стабильность», используемому в работах по гидробиологии. Определение степени стабильности для существующих устойчивых систем представляет практический интерес.

Пример 15. Анализ устойчивости и определение степени стабильности экологической системы «планктон — среда» Белого моря*. Рассматриваемая ниже математическая модель аналогична модели, изучаемой в работе [43]. В этой работе предложен оригинальный эвристический критерий оценки устойчивости водной экологической системы, основанный на подсчете числа движений системы от равновесия к равновесию. Если первых движений наблюдается больше, то система неустойчива, и наоборот. Критерий эффективен при условии, что наблюдаемые движения системы синхронизированы с движением Солнца, т. е. изменения выполняются в один и тот же час суток. В рассматриваемом примере сравнивается устойчивость двух моделей: модели планктона и модели среды. Будем решать эту задачу более строго, на основании приведенных выше положений теории устойчивости в малом А. Ляпунова, используя экспериментальный материал наблюдений Белого моря [43].

Исходные данные приведены в табл. 28. Схема исследуемой системы показана на рис. 38. Внешними воздействиями на систему являются λ_1 — солнечная радиация и λ_2 — температура поверхностного слоя воды.

* Пример написан совместно с аспирантом В. Н. Высоцким по данным работы [43].

Система планктона характеризуется следующими биотическими переменными: φ_1 — продукция фитопланктона; v_1 — численность фитопланктона; v_2 — количество бактерий; v_3 — биомасса фитопланктона; v_4 — зоофаги; v_5 — фитофаги; v_6 — хлорофилл.

Система среды описывается следующими абиотическими переменными: φ_2 — нитратный азот; w_1 — неорганический фосфор; w_2 — кремний.

Интервал усреднения данных — пять дней. Все указанные в таблице данные получены за период с 15.VII по 20.IX 1971 г. на биостанции Московского государственного университета [43].

Алгоритмы открытия законов Белого моря. Принцип самоорганизации, в частности МГУА, позволяют найти дифференциальные уравнения регрессии непосредственно по приведенным экспериментальным данным. Дополнительной априорной информации о взаимосвязи переменных не требуется. Для получения линейных уравнений достаточно применить линейные частные полиномы.

Для того чтобы полученные уравнения можно было назвать законами, действующими в системе Белого моря, их селектировали по критерию несмещенности. Экзамен на несмещенность оценок прошли приведенные ниже дифференциальные уравнения регрессии, которые составлены относительно центрированных переменных: *

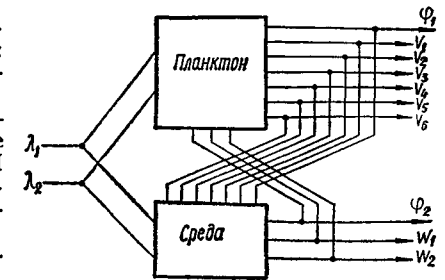


Рис. 38. Структура системы планктон — среда.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} = & -7,93 - \varphi_{1(0)} - 1,06 \cdot 10^{-5} v_{2(-1)} + 2,64 \cdot 10^{-6} v_{2(-2)} - \\ & - 1,21 \cdot 10^{-3} v_{3(-1)} + 7,777 \cdot 10^{-6} v_{3(-3)} - 3,03 \cdot 10^{-3} v_{4(-1)} + \\ & + 4,75 \cdot 10^{-3} v_{5(-1)} + 3,18 \lambda_{2(-1)} + 0,736 \lambda_{2(-2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = & -3,84 \cdot 10^4 - v_{1(0)} - 2,42 v_{5(0)} + 3,156 \cdot 10^3 w_{1(-2)} + \\ & + 5,688 \cdot 10^3 w_{1(-3)} + 6,95 \cdot 10^3 \lambda_{2(-2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = & 2,87 \cdot 10^3 - 4,119 \cdot 10^{-2} v_{1(-3)} - 1,05 v_{2(0)} - 7,33 \cdot 10^{-2} v_{2(-2)} - \\ & - 3,091 v_{3(-2)} + 1,612 \cdot 10^3 v_{3(-3)} - 1,929 \cdot 10^3 w_{1(0)} + 2,703 \cdot 10^4 w_{1(-1)} + \\ & + 2,706 \cdot 10^2 w_{2(-2)} + 1,765 \cdot 10^4 \lambda_{2(0)} - 1,871 \cdot 10^4 \lambda_{2(-1)}; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta v_3}{\Delta t} = -1,092 \cdot 10^2 - 0,882 v_{3(0)} + 2,259 \cdot 10^{-3} v_{5(-2)} - 3,004 \varphi_{2(0)};$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_4}{\Delta t} = & -8,44 + 6,222 \cdot 10^{-3} v_{1(-1)} + 2,569 \cdot 10^{-3} v_{2(-1)} + 0,779 v_{3(-1)} - \\ & - 1,0 v_{4(0)} - 4,301 w_{1(-1)} + 1,845 \cdot 10^3 \lambda_{2(0)} - 1,06 \cdot 10^3 \lambda_{2(-1)}; \end{aligned}$$

* Программа «Алгоритм синтеза линеаризованных уравнений динамики сложных систем по МГУА и исследование устойчивости» зарегистрирована в Украинском Республиканском Фонде алгоритмов. Авторы программы В. Н. Высоцкий и И. К. Тимченко.

Исходные данные

№ точек	Месяц и число	Внешние воздействия		Биотические		
		λ_1	λ_2	φ_1	v_1	v_2
1	15.VII	293,0	10,7	82	54 900	392 000
2	20.VII	252,4	9,9	89	267 250	474 000
3	25.VII	211,8	9,1	96	479 600	556 000
4	30.VII	158,6	10,99	62,11	227 422	568 222
5	5.VIII	114,2	12,6	40,9	24 787	669 200
6	10.VIII	105,2	13,1	70,4	20 322	1 125 200
7	15.VIII	109,31	13,2	91,1	24 360	1 394 200
8	20.VIII	165,86	11,64	76,6	62 410	915 200
9	25.VIII	195,96	10,06	67,5	93 061	506 778
10	30.VIII	120,23	8,33	80,3	94 117	380 667
11	5.IX	96,4	6,7	82	92 259	368 091
12	10.IX	150,4	5,2	67	86 159	525 818
13	15.IX	186,82	3,97	51,1	90 067	611 222
14	20.IX	152,93	3,8	31,67	134 150	407 333

*Все данные относятся к поверхностному слою воды.

к примеру 15 *

переменные				Абиотические переменные		
v_3	v_4	v_5	v_6	φ_2	w_1	w_2
284,6	16,0	30,7	0,08994	6,7	1,6	200
555,8	49,3	35,9	0,144255	3,35	1,675	150
827,1	82,6	41,0	0,19857	0	1,75	100
476,4	265,6	454,7	0,17289	5,83	1,167	44,4
187,9	371,9	717,6	0,14664	13,55	1,197	9
148,4	171,2	377,0	0,11804	28,8	3,682	54
111,6	36,3	134,9	0,11253	38,3	5,443	98
85,4	164,2	286,9	0,19939	24,8	4,308	138
84,3	240,9	366,6	0,26927	12,59	4,633	176,7
18,4	112,6	156,9	0,27129	5,53	10,8	210
209,3	32,8	26,1	0,27331	9,06	13,082	197,3
123,3	25,7	13,8	0,27533	28,47	9,536	115,4
57,6	22,0	8,8	0,27856	41,52	7,389	46,7
73,9	31,6	33,1	0,28664	29,13	10,833	30

Анализ устойчивости и определение степени стабильности. Программа синтеза управлений содержит этап определения корней характеристического уравнения системы и, следовательно, степени стабильности. На данном экспериментальном материале получены следующие корни характеристического уравнения:

Для системы планктона:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0,13; \quad \lambda_{2,3} = -0,189 \pm j1,54; \\ \lambda_4 &= -0,215; \quad \lambda_{5,6} = -0,663 \pm 0,98; \\ \lambda_{7,8} &= -0,638 \pm j0,372; \quad \lambda_{9,10} = -0,708 \pm j1,36; \quad \lambda_{11} = -0,884; \\ \lambda_{12,13} &= -1,55 \pm j0,07; \quad \lambda_{14,15} = -1,78 \pm j0,9; \\ \lambda_{16,17} &= -1,85 \pm j1,49; \\ \lambda_{18,19} &= -1,87 \pm 0,744; \quad \lambda_{20} = -1,88; \quad \lambda_{21} = -4,17.\end{aligned}$$

Для системы среды:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0,019; \quad \lambda_2 = -0,204; \quad \lambda_{3,4} = -0,212 \pm j1,36; \\ \lambda_{5,6} &= -0,705 \pm j1,38; \\ \lambda_{7,8} &= -7,69 \pm j0,4; \\ \lambda_9 &= -7,69.\end{aligned}$$

Для системы «планктон—среда»:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0,0176; \quad \lambda_2 = -0,0367; \quad \lambda_{3,4} = -0,0398 \pm j1,14; \\ \lambda_5 &= -0,117; \quad \lambda_6 = -0,141; \quad \lambda_{7,8} = -0,172 \pm j1,5;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta v_5}{\Delta t} &= 91,8 + 1,017 \cdot 10^4 v_{1(0)} + 0,718 v_{3(-1)} + 3,082 v_{3(-2)} - 3,77 \cdot 10^{-3} v_{4(0)} - \\ &- 1,138 v_{5(0)} - 2,03 \cdot 10^2 w_{1(0)} - 1,817 \cdot 10^2 w_{1(-1)} - 93,9 w_{1(-2)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta v_6}{\Delta t} &= 3,09 \cdot 10^{-2} + 7,502 \cdot 10^{-6} v_{1(-2)} - 3,34 \cdot 10^{-9} v_{2(-2)} - \\ &- 1,086 \cdot 10^{-4} v_{3(-1)} - 3,51 \cdot 10^{-5} v_{3(-2)} - 1,92 \cdot 10^{-4} v_{3(-3)} + \\ &+ 2,35 \cdot 10^{-6} v_{5(-3)} - v_{6(0)} - 1,35 \cdot 10^{-4} w_{1(0)} + 1,99 \cdot 10^{-5} w_{1(-1)} - \\ &- 6,77 \cdot 10^{-5} w_{1(-3)};\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения системы среды:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \varphi_2}{\Delta t} &= 6,06 - 4,69 \cdot 10^{-2} \varphi_{1(-3)} + 1,707 \cdot 10^{-7} v_{1(-3)} + 2,51 \cdot 10^{-8} v_{2(0)} + \\ &+ 5,42 \cdot 10^2 v_{3(-3)} - \varphi_{2(0)} + 2,9 w_{1(-1)} - 2,395 \lambda_{2(-2)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w_1}{\Delta t} &= 4,3 + 1,304 \cdot 10^{-6} v_{2(0)} + 1,74 \cdot 10^4 v_{2(-2)} + 1,092 \cdot 10^{-5} v_{2(-3)} - \\ &- 8,57 \cdot 10^{-4} v_{3(-2)} + 5,94 \cdot 10^{-5} v_{5(0)} + 4,39 \cdot 10^{-2} \varphi_{2(-3)} - w_{1(0)} - \\ &- 1,015 \cdot 10^{-2} w_{1(-1)} + 0,304 w_{1(-2)} + 0,503 w_{1(-3)} - 1,106 \lambda_{2(-3)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w_2}{\Delta t} &= -62,03 + 3,313 \cdot 10^{-4} v_{2(-3)} + 4,16 \cdot 10^{-3} v_{3(-2)} + 1,244 \cdot 10^{-2} v_{5(-3)} + \\ &+ 0,714 \varphi_{2(-2)} - 5,592 \varphi_{2(-3)} - 1,569 w_{1(-2)} - w_{2(0)} + 3,545 \lambda_{2(-3)}.\end{aligned}$$

$$\lambda_{9,10} = -0,175 \pm j1,43; \quad \lambda_{11,12} = -0,230 \pm j0,884;$$

$$\lambda_{13,14} = -0,45 \pm j0,512; \quad \lambda_{15,16} = -0,544 \pm j0,258;$$

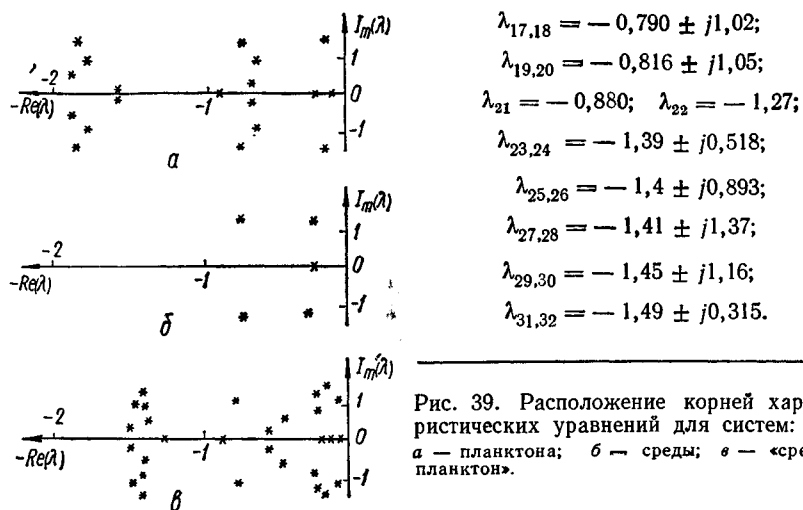


Рис. 39. Расположение корней характеристических уравнений для систем: а — планктон; б — среды; в — «среда — планктон».

Корни этих уравнений изображены на рис. 39. Из рисунка следует, что система среды слабо устойчива, так как один из корней лежит почти на оси мнимых чисел. В ней основными являются четыре первых корня: $\lambda_1 = -0,019$; $\lambda_2 = -0,204$; $\lambda_{3,4} = -0,212 \pm j1,36$. Степень стабильности $c_1 = 0,019$.

Параметры основной гармоники свободных колебаний: период $T = 23$ дня, коэффициент затухания $c \approx 0,63$.

В системе планктона основными являются: корни $\lambda_1 = -0,13$; $\lambda_{2,3} = -0,189 \pm j1,54$; степень стабильности $c_1 = 0,13$. Период основной гармоники $T = 20,5$ дня, коэффициент затухания $c \approx 0,42$.

В целом система «планктон—среда» устойчива. Здесь степень стабильности $c_1 = 0,018$; период основной гармоники $T \approx 27$ дней, коэффициент затухания $c = 0,185$.

Оказалось, что система планктона значительно стабильнее системы среды (сравниваются $c = 0,13$ и $c = 0,019$), что соответствует оценкам стабильности, построенным в работе [89].

Глобальная устойчивость экосистем при больших отклонениях. Устойчивость нелинейных систем при больших отклонениях исследована гораздо хуже, чем устойчивость при малых отклонениях. Отметим два основных подхода к исследованию устойчивости:

1. Для систем первого и второго порядка удобно применить исследование движения системы на фазовой плоскости.

2. Общий подход к исследованию устойчивости дает второй метод Ляпунова, связанный с необходимостью подобрать функцию Ляпунова, имеющую размерность энергии, накопленной в системе.

Если функция Ляпунова V во всем фазовом пространстве положительна, то для абсолютной устойчивости системы достаточно, чтобы производная $\frac{dV}{dt}$ была всюду отрицательна.

Условие $\frac{dV}{dt} = 0$ определяет границу области устойчивости. Этот метод, широко применяемый в технике, дает достаточные (т. е. избыточные) условия устойчивости систем при больших отклонениях от равновесия.

Метод МГУА позволяет легко получить (по экспериментальным данным) систему нелинейных дифференциальных уравнений регрессии с запаздывающими аргументами. Для этого достаточно в программе применить нелинейные частные уравнения.

Функция Ляпунова для таких уравнений позволит определить границу системы, на которой она еще остается устойчивой. Так можно определить допустимую (по условию устойчивости) степень загрязнения моря или водоема.

ПРЯМОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДОЕМОВ ПО МАЛОМУ ЧИСЛУ НАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Необходимость предсказания поведения сложных экологических, социальных, экономических и других процессов требует создания математической модели оптимальной сложности, адекватной этим процессам. Современные методы корреляционно-регрессионного и факторного анализа обладают тем основным недостатком, что тип модели выбирается априори, т. е. вносится априорная информация о причинноследственных связях в системе, хотя последние в сложной системе не прослеживаются.

Методы прямого моделирования по малому числу экспериментальных данных, основанные на принципах самоорганизации, предполагают, что вся информация о процессе уже заложена в этих данных. Вид уравнения, адекватный по сложности и характеру происходящим процессам, выбирает сам алгоритм МГУА. Применительно к процессам самоочищения это означает, что они описываются уравнениями в частных производных, разностный аналог которых требуется найти.

Многие задачи экологии — науки о среде обитания — сводятся к определению так называемых критических количеств. Если, например, выпустить в озеро сотню мальков, то все они постепенно погибнут, хотя бы потому, что вероятность оплодотворения икры весьма мала. Если же выпустить десять тысяч мальков, то данный вид рыбы выживает.

Количество многих видов животных, рыб и птиц на Земле с каждым годом уменьшается. Как только это количество достигнет критического значения, вид исчезает навсегда. Ясно, что человек должен знать это пороговое значение хотя бы для того, чтобы вовремя принять экстренные меры по спасению того или иного вида.

К определению критических количеств сводится и определение количества сбросов промышленных отходов в озера и моря. Академик П. Л. Капица пишет: «...подход «не трогайте Байкала» — это неправильный подход. Байкал надо эксплуатировать, но так, чтобы не нарушить в нем жизни и сохранить его очистительные свойства» [46]. Ниже рассмотрен математический метод определения критического количества содержания примесей в водах озера, при которых еще не нарушается механизм самоочищения. При большем количестве этот механизм будет сломлен и начнется так называемая эвтрофикация озера.

Аналогично могут быть вычислены критические количества в указанных выше других задачах. Как уже отмечалось, подход самоорганизации не требует глубокого проникновения в механизм самоочищения. Методы прямого моделирования сложных систем по небольшому числу экспериментальных точек наблюдения не требуют внесения априорной информации об элементарных причинно-следственных связях. Применительно к моделированию процессов самоочищения в водоемах это означает, что самая точная информация об этих процессах уже содержится в экспериментальных данных, и никаких дополнительных гипотез не требуется.

Пример 16. Определение критического загрязнения оз. Байкал *. Математическая обработка экспериментальных данных по алгоритмам МГУА на вычислительной машине позволила синтезировать нелинейную модель динамики поля загрязнения оз. Байкал в виде системы разностных уравнений с запаздывающими аргументами:

$$u_{j,t+\Delta t} = 0,1474 - 0,26667u_{j,t-\Delta t} - 0,03719u_{j-\Delta x,t} - 0,063219u_{j,t} + 0,063945u_{j,t}^2 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Применение критерия устойчивости Ляпунова

$$V_n - V_{n-1} \leq 0;$$

$$V^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

позволило определить радиус $\rho < 15$ мг/л параболоида области устойчивости в пространстве координат u_j ($j = 1, \dots, n$), в котором система заведомо устойчива.

Пример рассчитан по данным минерализации поверхностного слоя воды оз. Байкал. В результате расчета получена цифра предельно допустимой минерализации, превышение которой ведет к неустойчивости, т. е. к непрерывному росту загрязнения озера. Синтез учитывает прямым образом процесс самоочищения вод озера, наблюдаемый в природе.

* Пример написан с аспирантом П. И. Ковальчуком по данным совместных работ с Новочеркасским гидрохимическим институтом.

Зависимость выражается авторегрессионной функцией:

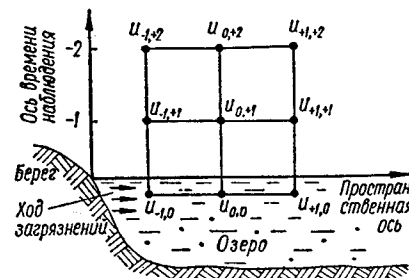
$$u_{j,t+\Delta t} = f[u_{j,t-k\Delta t}, \dots, u_{j\pm\Delta x,t}],$$

где $k = 1, \dots, l$; $i = 1, \dots, m$.

Такому динамическому соотношению нельзя придать какой-либо физический смысл. Здесь заложены лишь совершенно очевидные представления о том, что следующее значение является функцией близких во времени и пространстве значений.

Количество аргументов может быть выбрано с запасом, так как алгоритмы

Рис. 40. Обозначение девяти точек, усредняемых в алгоритме МГУА по ряду изменений загрязнения поверхностного слоя воды озера (первый индекс — смещение во времени, второй — в пространстве).



самоорганизации устойчивы к мультиколлинеарности (а значит, и к плохой обусловленности матриц). Синтез модели динамики минерализации поверхностного слоя оз. Байкал проводился по обобщенному алгоритму МГУА с селекцией проекторов. В качестве элементарных опорных функций были выбраны полиномы. В селекции принимали участие аргументы $u_{j,t}$, $u_{j-\Delta x,t}$, $u_{j+\Delta x,t}$, $u_{j,t-\Delta t}$ (рис. 40).

В результате синтеза была получена следующая система нелинейных уравнений с запаздывающими аргументами

$$u_{j,t+\Delta t} = 0,1474 - 0,26667u_{j,t-\Delta t} - 0,03719u_{j-\Delta x,t} - 0,063219u_{j,t} + 0,063945u_{j,t}^2 \quad j = 1, \dots, n.$$

С учетом граничных условий, например в виде

$$u_0 = u_1, \quad u_n = u_{n+1},$$

получим матричное уравнение

$$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1} + Cu_n^2 + b.$$

Легко убедиться, что если

$$2_{\max} (\|A + 2Cu_{\text{ср}}\|, \|B\|) < 1,$$

где

$$\|A\| \max_j |a_{i,j}|,$$

то матричное уравнение устойчиво по линейному приближению.

Определение стационарной точки решения уравнения показало, что все траектории процесса сходятся к значению $Q_j = u_j + u_{j,\text{ср}} = 94,25$ мг/л.

Применение функции устойчивости Ляпунова

$$v^2 = v_0^2 + \dots + v_{n+1}^2$$

позволило определить радиус области устойчивости в пространственных координатах u_j ($j = 0 \dots n+1$). Оказывается, что при $\rho < 15$ мг/л система заведомо устойчива. Присутствие нелинейного члена в матричном уравнении показывает, однако, что при значительном отклонении от стационарной точки (например,

когда $u_0 = u_1 = \dots = u_{n+1} = 20$ мг/л) происходит процесс непрерывного возрастания загрязнения озера (взрыв эвтрофикации).

Хотя в полученном уравнении нельзя непосредственно определить члены, связанные с самоочищением, полученные результаты о характере динамики минерализации позволяют учесть трансформацию веществ, связанных с этим показателем. При резком отклонении минерализации от стационарной точки способность озера к самоочищению резко падает, о чем говорит неустойчивость системы при превышении указанного порогового значения загрязнения.

Так как процессы самоочищения в различных частях озера неодинаковы, величины допустимого загрязнения нужно определять для каждой части озера отдельно. Порог определяет допустимое загрязнение по условию сохранения самоочищающих свойств данной части озера. Практически допустимое загрязнение должно быть в 5—10 раз меньше критического значения.

Сравнивая последние два примера (15 и 16), можно заметить, что в первом из них (Белое море) показано прямое определение предельно допустимого по условиям устойчивости загрязнения при измерениях в одном и том же месте водоема, последовательно во времени, а во втором (оз. Байкал) — при измерениях в нескольких точках водоема одновременно.

Между моделями, синтезированными в примерах, посвященных задачам Белого моря и оз. Байкал, существуют как сходство, так и различие. В примере 15 все данные измеряются в одной и той же точке моря. Следовательно, моделируется случайный процесс — изменение величин во времени.

В примере 16 данные измеряются в нескольких точках, поэтому можно получить уравнения для скорости распространения загрязнений по любой пространственной координате. Здесь синтезируется модель поля загрязнения озера — закон изменения величин в пространстве и во времени.

В обеих задачах уравнения получены прямым методом по небольшому числу данных натурных измерений при помощи МГУА.

Можно ли узнать судьбу Балтийского моря? Известно, что содержание кислорода в воде Балтийского моря почти монотонно падает. Если такое падение будет продолжаться еще 20—30 лет, море превратится в гниющее болото — наступит так называемая эвтрофикация.

Известно также, что сток в море фосфатов и других веществ в результате усиленного применения удобрений ежегодно увеличивается и будет увеличиваться. Фосфаты — одна из причин уменьшения содержания кислорода, кроме того, увеличивается и сток промышленных вод.

Вместе с тем, часть ученых утверждает, что опасность вовсе не доказана. Измерения содержания кислорода начались только недавно (30 лет назад). Вполне вероятно, что подобные длительные спады содержания кислорода были уже и раньше, может быть тысячу лет назад. Морю необходима пара хороших бурь, которые через пролив сменяют воду в море, и она снова будет свежей. Содержа-

ание кислорода повысится. Что до фосфатов и сточных вод, то их влияние может быть и не столь велико, чтобы так быстро загрязнить море.

Чтобы разрешить эту проблему, необходимо объективное моделирование по принципу самоорганизации.

На основании исследования детерминированных моделей (Фачеллуа и др.) следует составить список возможных переменных. Пользуясь данными натурных измерений за 20—30 лет, можно получить дифференциальные уравнения регрессии по алгоритмам МГУА. Если минимум критерия несмещенности будет достаточно глубоким (а для этого нужно соответствующим образом выбрать область перебора машины), то пошаговое интегрирование уравнений даст точный прогноз судьбы моря. При этом монотонное изменение содержания кислорода на всех экспериментальных точках вовсе не означает, что прогноз пойдет только вниз (см. рис. 20). В этом и заключается особенность системного, дифференциального многократного прогноза.

Глава V

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПРОГНОЗА

О МЕТОДАХ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПРОГНОЗА

Если при синтезе уравнений управления алгоритм МГУА без протекции переменным из всего множества предложенных машине аргументов оставил только один из них, а именно аргумент времени, то данный процесс неуправляем. Примеры показывают, что многие процессы в мире являются неуправляемыми, идущими в функции времени (например, процесс изменения среднегодового стока реки).

Если же алгоритм МГУА селектировал некоторое множество аргументов, среди которых имеются произвольно изменяемые (регулируемые) величины, то процессом можно управлять так, чтобы всемерно улучшить прогноз — будущее состояние объекта. В этом случае можно поставить задачу управления с оптимизацией прогноза. В этой главе последовательно показаны методы синтеза такого управления и исследуются его свойства.

Для нелинейных уравнений рекомендуется метод усеченного перебора вершин гиперкуба возможных управлений (называемый также методом самоорганизации управления), который практически можно применять только при небольшом числе регулирующих

воздействий (не более трех-четырех). При большем числе время счета программы синтеза становится слишком большим.

Для линейных уравнений можно рекомендовать методы полного перебора вершин гиперкуба управлений, так как здесь достаточно опробовать для каждого приращения регулирующих воздействий только два значения: минимальное и максимальное. Если регулирующих воздействий немного, то усечение перебора не требуется. По этому методу выполнен пример синтеза управления «моделью динамики мира».

Таблица 29

Сравнение областей применения методов синтеза управления с оптимизацией прогноза

Методы синтеза	Уравнение объекта	Критерий оптимальности (функционал)	Число регулирующих воздействий	Число переменных состояния
Динамическое программирование или усеченный перебор	Нелинейные и линейные	Нелинейный и линейный	Не более четырех-пяти	Не более четырех-пяти
Перебор вершин гиперкуба управлений с селекцией наиболее перспективных (примеры 17, 18)	То же	То же	То же	Практически не ограничено
Упрощенный вариант принципа максимума для дискретных статических уравнений (примеры 19, 20)	Линейные	Линейный	Практически не ограничено	То же
Полный перебор вершин гиперкуба управлений для дискретных статических уравнений	»	Нелинейный и линейный	Не более трех-четырех	» »
Полный принцип максимума для уравнений динамики	»	Квадратичный и линейный	Практически не ограничено	» »

Данные, опубликованные в книге Дж. Форрестера «Динамика мира» [80], за период 1900—1973 гг. и список его переменных были приняты в качестве единственной априорной информации. Используя прямой метод самоорганизации, удалось получить линейные уравнения прогнозирования и уравнения управления, отличающиеся друг от друга по составу аргументов. Решения тех и других уравнений близки к

решениям нелинейных уравнений Форрестера. Однако это только означает, что метод МГУА работоспособен. Чтобы получить действительный объективный прогноз, нужны реальные статистические данные. Для линейных уравнений также применим принцип максимума в его упрощенной форме. Упрощение заключается в том, что для синтеза достаточно выяснить только знак влияния приращения регулирующих воздействий на показатель качества. По этому принципу выполнен пример синтеза управления экономической системой Англии.

Для линейных уравнений при квадратичном критерии оптимальности можно рекомендовать полную форму принципа максимума. Как известно, принцип максимума в применении к дифференциальным уравнениям не дает оптимальной последовательности управлений непосредственно, как это имеет место при динамическом программировании или при использовании принципа самоорганизации в методе усеченного перебора.

Для всех методов синтеза (табл. 29) разработаны вычислительные программы. Примеры, приведенные в данной главе, иллюстрируют применение этих программ.

ИЕРАРХИЯ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Для задач краткосрочного прогнозирования в качестве критерия селекции можно использовать критерий регулярности — величину среднеквадратичной ошибки, определяемой на точках отдельной проверочной последовательности, не участвующих в процедуре получения оценок коэффициентов. Специальный выбор способа разделения точек таблицы исходных данных на обучающую и проверочную последовательность (способа регуляризации) позволяет увеличить время упреждения прогноза и даже, в ряде задач, получить уравнения для среднесрочного прогнозирования [42].

Однако для задач среднесрочного (а иногда и для долгосрочного) прогнозирования более эффективным является критерий несмещенности, который также можно улучшить при помощи специального выбора способа регуляризации. Если вид опорной функции подобран удачно, а помехи измерения переменных малы, то критерий несмещенности позволяет решить задачи долгосрочного прогнозирования со временем упреждения десять и более тактов времени (лет).

Если в таблице исходных данных имеется информация об изменении нескольких взаимосвязанных переменных, то появляется возможность выбора еще более эффективного критерия — критерия баланса переменных.

Критерий баланса переменных приводит к успешному решению задачи долгосрочного и сверхдолгосрочного прогнозирования только

при условии наличия некоторой, еще не вполне ясной и формализованной, связи между переменными (системности). Этот критерий дает хорошие результаты только при наличии системности задачи. Если переменные не взаимосвязаны или функция баланса выбрана неудачно, глубокого минимума критерия баланса переменных не получится.

Для сокращения объема перебора моделей при всех указанных критериях полезно воспользоваться критерием физической реализуемости прогноза как вспомогательным, т. е. сразу исключить из перебора модели, дающие явно несуразные прогнозы (например отрицательное число для величины, которая не может быть отрицательной). Этот критерий подчинен всем другим. В свою очередь, критерий регулярности только помогает критерию несмещенности (о чем уже говорилось), а критерий несмещенности сокращает перебор моделей для применения критерия баланса переменных, как основного критерия при долгосрочном прогнозе.

Способ получения критерия баланса переменных при прогнозировании по трендам оптимальной сложности. Допустим, что в таблице исходных данных содержится информация об изменении нескольких переменных за несколько лет. Тогда, выбрав ту или иную опорную функцию (проще всего — полином), можно, пользуясь алгоритмами МГУА, получить тренды оптимальной сложности. Разработаны два типа алгоритмов МГУА:

1. В многорядных алгоритмах сложность моделей нарастает быстро, но некоторые полиномы пропускаются. Так, например, при квадратичном частном описании степень полного полинома увеличивается сразу в два раза: вторая, четвертая, восьмая и т. д. При линейном частном описании без протекции переменным полное описание остается линейным, но число аргументов увеличивается в два раза: два, четыре, восемь и т. д. Число моделей, которые следует сравнить по критерию селекции, при этом значительно уменьшается. Модель самой оптимальной сложности может быть при этом пропущена, а найдена ближайшая к ней (по величине критерия селекции) модель.

2. В комбинаторном алгоритме сложность увеличивается таким образом, что ни одна из возможных моделей не пропускается (см. табл. 10, 11); однако объем перебора моделей здесь во много раз больше. Многорядные алгоритмы следует применять только для решения больших по объему задач, когда комбинаторный алгоритм увеличения сложности не проходит на имеющейся вычислительной машине (ориентировочно при числе аргументов больше десяти — для линейных и пяти — для нелинейных моделей).

Увеличение сложности моделей продолжается до тех пор, пока снижается критерий баланса переменных, определяемый следующим образом.

В систему заданных переменных произвольно добавляются одна или несколько вспомогательных переменных: $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n$, которые могут вообще не иметь определенного особого физического смысла. Примеры показывают, что эффективными являются суммы и разности нормированных значений переменных. Например, в задаче, где заданы три переменные X_1, X_2 и X_3 , можно рекомендовать следующие вспомогательные уравнения (уравнения баланса): *

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= +x_1 + x_2 + x_3; & \Phi_4 &= +x_1 - x_2 + x_3; \\ \Phi_2 &= -x_1 + x_2 + x_3; & \Phi_5 &= +x_1 - x_2 - x_3; \\ \Phi_3 &= -x_1 - x_2 + x_3; & \Phi_6 &= -x_1 - x_2 - x_3.\end{aligned}$$

Значения, соответствующие вспомогательным переменным $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_6$, вводятся в таблицу исходных данных, и в дальнейшем прогнозируются наравне со всеми другими переменными системы. Для каждой переменной постепенно увеличивают сложность тренда (по правилам многорядной селекции или по табл. 10, 11), причем основным критерием селекции служат невязки принятых уравнений баланса переменных на исследуемом интервале прогноза (от момента t_1 до момента t_2 в будущем):

$$\begin{aligned}b_1 &= \Phi_1 - (x_1 + x_2 + x_3); & b_4 &= \Phi_4 - (x_1 - x_2 + x_3); \\ b_2 &= \Phi_2 - (-x_1 + x_2 + x_3); & b_5 &= \Phi_5 - (x_1 - x_2 - x_3); \\ b_3 &= \Phi_3 - (-x_1 - x_2 + x_3); & b_6 &= \Phi_6 - (-x_1 - x_2 - x_3).\end{aligned}$$

Критерий баланса определяется как среднее квадратическое значение невязок:

$$B^2 = \left(\sum_{t_1}^{t_2} b_{1i}^2 + \sum_{t_1}^{t_2} b_{2i}^2 + \dots + \sum_{t_1}^{t_2} b_{6i}^2 \right) \rightarrow \min, \quad t_1 \leq i \leq t_2.$$

При использовании двух уравнений баланса в качестве одной функции баланса рекомендуется взять сумму нормированных переменных, а в качестве другой — их разность. Из всех систем уравнений выбирается та, которая отвечает минимуму суммы квадратов этих функций.

Выберем, например, две вспомогательные функции:

$$\Phi_1 = x_1 + x_2; \quad \Phi_2 = x_1 - x_2.$$

Разбалансы (невязки) соответственно имеют вид:

$$b_1 = \Phi_1 - (x_1 + x_2); \quad b_2 = \Phi_2 - (x_1 - x_2).$$

Суммарные разбалансы на всем интервале прогнозирования:

$$B_1^2 = \sum_{t_1}^{t_2} b_{1i}^2; \quad B_2^2 = \sum_{t_1}^{t_2} b_{2i}^2.$$

* О новом способе синтеза функции см. сноску на стр. 13.

Критерий баланса (основной критерий селекции)

$$B^2 = (B_1^2 + B_2^2) \rightarrow \min.$$

Согласно этому суммарному критерию выбирается комбинация уравнений, которая на плоскости $B_1^2 - B_2^2$ изображается точкой, ближайшей к началу координат.

При использовании одного уравнения баланса решение может быть неоднозначным. В этом случае следует ввести еще одну вспомогательную переменную и еще одно уравнение баланса, отличное от первого, т. е. использовать еще одно внешнее дополнение для получения единственной модели оптимальной сложности. Истинный прогноз удовлетворяет всем условиям баланса. Ложные прогнозы могут случайно удовлетворять только части (одному) из них. Во многих задачах в качестве единственной вспомогательной переменной удобно использовать показатель качества системы. Если неоднозначности не встречается, то такой выбор уравнений баланса практически удобен.

При выборе вспомогательных переменных и вида функций следует исходить из правила: более эффективным является тот набор переменных, который обеспечивает однозначность решения при более глубоком минимуме критерия селекции. Таким образом, выбор вида функции решается сравнением вариантов наборов переменных.

По критерию баланса выполняется полный перебор всех возможных комбинаций трендов. Другие критерии селекции могут быть использованы при этом как вспомогательные для уменьшения объема перебора трендов. Например, сначала выбирают F трендов каждой переменной по критерию физической реализуемости или несмещенности, а из них, по критерию баланса переменных, как основному критерию селекции, уже находят самые оптимальные тренды.

Пример 17. Прогнозирование числа жителей города. * В табл. 30 показано изменение двух переменных X_1 (число жителей города) и X_2 (сумма родившихся в городе и прибывших в него). Суммирование во времени начинается с 1960 г. Вводим условное уравнение баланса

$$\Phi = X_1 + X_2.$$

Цифры, соответствующие этому уравнению, записываем в крайнюю графу табл. 30. Согласно комбинаторному алгоритму МГУА, заполняем три таблицы постепенного усложнения трендов, для каждой переменной — отдельную таблицу. Оценки коэффициентов трендов находим при помощи обычного регрессионного анализа.

Допустим, требуется узнать число жителей города в 1990 г. Если ограничиться рассмотрением только трендов второй степени, то для каждой переменной таблица будет содержать 31 уравнение (см. табл. 10). Чтобы выбрать лучшую комбинацию трендов по критерию баланса переменных, необходимо осуществить полный перебор 31^3 -ти комбинаций, который слишком велик для машины. Воспользуемся

вспомогательными критериями. Таким критерием в первую очередь может быть критерий физической осуществимости прогноза. Допустим, в исследуемом году население данного города не может быть отрицательной величиной, а также не может превысить значения 10 000 тысяч жителей. По критерию физической осуществимости из перебора сразу выпадают все тренды четвертого (и последующих) столбцов табл. 10, так как все они дают в 1990 г. заведомо невозможные прогнозы.

Таблица 30

Исходные данные к примеру 17

Год	Такт времени, T	Переменные, тыс.		
		X_1	X_2	Φ
1960	1	501	26	527
1961	2	510	48	558
1962	3	550	75	625
1963	4	570	103	673
1964	5	630	127	757
1965	6	530	148	678
1966	7	745	174	979
1967	8	810	201	1011
1968	9	910	224	1134
1969	10	1010	251	1261
1970	11	1100	273	1373

Это же показывает, что дальнейшее наращивание сложности трендов (повышение степени полиномов) нецелесообразно, т. е. оптимальное решение найдено. Остается перебрать комбинации из 16-ти уравнений для трех переменных, т. е. проверить 16^3 комбинаций, что уже под силу многим машинам. Комбинации трендов оцениваются по основному критерию селекции — по критерию баланса переменных. Та комбинация лучше, которая дает минимальный разбаланс в интервале, например от 1965 до 1995 гг.:

$$B = \sum_{1985}^{1945} b_i^2 = \sum_{25}^{35} [\Phi_i - (X_1 + X_2)]^2 \rightarrow \min.$$

В данном примере наиболее удовлетворяет балансу следующая система трендов:

$$X_1 = 495 + 5,01T^2;$$

$$X_2 = 0,01 + 24,09T;$$

$$\Phi = 495,0 + 24,99T + 5,01T^2,$$

где $T = 30$ лет.

* Пример написан совместно с аспиранткой Н. А. Ивахненко.

Прогноз населения города для 1990 г.

$$X_1 = 495 + 5,017^2 = 495 + 5,01 \cdot 30^2 = 4995 \text{ тыс. жителей.}$$

Решение однозначно, введение второй функции баланса не потребовалось.

Способ получения критерия баланса переменных при системном многократном дифференциальном прогнозе. Если долгосрочный прогноз получается при помощи многократного интегрирования системы дифференциальных уравнений регрессии вида

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta t} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad k = 1, 2, 3, \dots, m,$$

для получения критерия баланса переменных также довольно произвольно выбирается некоторая вспомогательная переменная — заданная функция других координат системы:

$$\Phi = f(x, x_1, \dots, x_m).$$

Пользуясь этим уравнением, в таблицу исходных данных вводят колонку цифр. Для новой переменной получается дополнительное дифференциальное уравнение регрессии, которое участвует в прогнозе наравне со всеми уравнениями для других переменных, т. е. интегрируется шаг за шагом. Уравнение баланса переменных должно точно выполняться на всех точках таблицы исходных данных и приближенно — в любой точке будущего. Та система дифференциальных уравнений является оптимальной, которая дает наименьшую невязку баланса переменных на интервале прогнозирования.

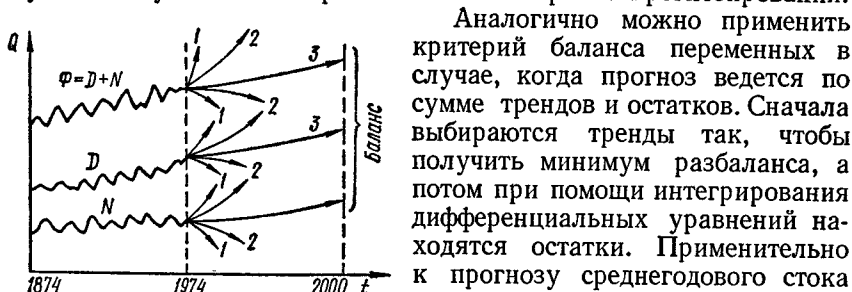


Рис. 41. К пояснению идеи долгосрочного прогноза:

1, 2, 3 — по критериям регулярности, несмещенности и баланса переменных соответственно.

использовать любую функцию стока этих рек, например сумму $\Phi = D + N$.

При помощи МГУА находятся F самых несмещенных трендов $\Phi(t)$, $D(t)$ и $N(t)$, т. е. критерий несмещенности используется как вспомогательный для уменьшения объема перебора. Из этого объема

выбираются три тренда, в наибольшей степени удовлетворяющие принятому уравнению баланса. Вспомогательные критерии, обладая большой плавностью характеристики, позволяют пользоваться многорядными алгоритмами и не проверять многие модели. Зная тренды, находят отклонения. Величина отклонений в будущем прогнозируется по алгоритму системного многократного дифференциального прогноза.

Минимум критерия баланса зависит от времени упреждения прогноза. Обычно с увеличением упреждения глубина минимума уменьшается. Поэтому при оценке глубины следует указать время упреждения, для которого этот минимум получен.

Практическое совпадение всех трендов на интервале интерполяции (рис. 41) выражает собой теорию множественности моделей. Расходящийся (при неточном нуле критерия баланса переменных) «веер» трендов на интервале экстраполяции означает, что практически всегда существует некоторое предельно допустимое время упреждения прогноза, при котором критерий баланса еще может выбрать тренд, идущий достаточно близко к процессу. Дальше точный прогноз не получается. Применение дробно-полиномиальных опорных функций (стр. 61) вместо полиномов часто позволяет увеличить время упреждения прогноза.

Дополнительное варьирование коэффициентов наилучшего тренда при помощи случайного поиска (этап адаптации коэффициентов) по комбинированному критерию $k = (n_{cm}/n_{cm.нач})^2 + (B/B_{нач})^2$ позволяет увеличить предельно допустимое время упреждения прогноза как по трендам, так и по дифференциальным уравнениям регрессии в несколько раз (см. стр. 274).

Если имеются данные только одной переменной, то в таблицу исходных данных вводят две вспомогательные функции, например квадрат и корень квадратный из значений переменных. С учетом критерия баланса необходимо, чтобы соотношение $x^2 : x : \sqrt{x}$ выполнялось не только на интервале интерполяции, но и на интервале экстраполяции, в необходимых пределах отсчета моментов времени.*

УПРАВЛЕНИЕ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПРОГНОЗА ПРИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ ОБЪЕКТА И ЗАДАЧА ЕГО СИНТЕЗА

Рассмотрим объекты, характеризующиеся конечным числом переменных, которые измеряются дискретно, через равные такты времени. Объект описывается дифференциальными уравнениями

* О «прямых» и «обратных» функциях см. журнал «Автоматика», 1975, № 4.

$$\frac{\Delta\varphi_0}{\Delta t} = f_1(x_{1,0}, x_{1,-1}, x_{1,-2}, \dots, x_{1,-T_L}, \mu_{1,0}, \mu_{1,-1}, \dots, \mu_{1,-T_L},$$

$$\lambda_{1,0}, \lambda_{1,-1}, \dots, \lambda_{1,-T_L},$$
$$x_{2,0}, x_{2,-1}, x_{2,-2}, \dots, x_{2,-T_L}, \mu_{2,0}, \mu_{2,-1}, \dots, \mu_{2,-2}, \lambda_{2,0}, \lambda_{2,-1}, \dots$$
 $\dots, \lambda_{2,-T_L},$

.....

$$x_{m,0}, x_{m,-1}, x_{m,-2}, \dots, x_{m,-T_L}, \mu_{n,0}, \mu_{n,-1}, \dots, \mu_{n,-T_L},$$
$$\lambda_{l,0}, \lambda_{l,-1}, \dots, \lambda_{l,-T_L};$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = f_2(x_{1,0}, \dots, x_{1,-T_L}, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{1,-T_L}, \lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{1,-T_L},$$

.....

$$\dots, x_{m,0}, \dots, x_{m,-T_L}, \mu_{m,0}, \dots, \mu_{m,-T_L}, \lambda_{l,0}, \dots, \lambda_{l,-T_L});$$

• • • • •

$$\frac{\Delta x_m}{\Delta t} = f_m(x_{1,0}, \dots, x_{1,-T_L}, \mu_{1,0}, \dots, \mu_{1,-T_L}, \lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{1,-T_L},$$

$$\dots, x_{m,0}, \dots, x_{m,-T_L}, \mu_{n,0}, \dots, \mu_{n,-T_L}, \lambda_{l,0}, \dots, \lambda_{l,-T_L}),$$

где $\Delta\varphi_0 = \varphi_{+1} - \varphi_0$; $\Delta x_1 = x_{1,-1} - x_{1,0}$; ... ; $\Delta x_m = x_{m,+1} - x_{m,0}$;

$$\Delta t = 1 \text{ такт.}$$

Такие уравнения можно получить по экспериментальным данным, пользуясь МГУА.

Функции f_1, f_2, f_3 обычно настолько сложны (степенные полиномы высокой степени с запаздывающими аргументами), что получить общее решение системы уравнений практически невозможно. Зато указанные уравнения можно легко интегрировать по шагам, так как значения переменных (в начале каждого такта) известны. Пользуясь уравнениями, легко высчитать значения переменных в конце интервала i , шаг за шагом, найти ряд значений выходной величины на T_y шагов вперед: $\varphi_0, \varphi_{+1}, \varphi_{+2}, \dots, \varphi_{+T_y}$. Значения μ свободно выбираются из множества допустимых значений $\mu \in M$ на каждом шагу $0 \leq i \leq T_y$.

При синтезе управления с оптимизацией прогноза необходимо решить две задачи:

1. *Определение оптимального управления при заданном T_y .* Следует найти такой ряд значений управляющего воздействия

$$\mu_0, \mu_{+1}, \mu_{+2}, \dots, \mu_{T_v},$$

чтобы через заданное число шагов T_y получить максимальное изменение прогноза

$$\varphi_{T_y} = (\varphi_{+T_y} - \varphi_0) \rightarrow \max.$$

При этом фазовые координаты $x_1, x_2, \dots, x_m$ и их приращения за интервал не должны выходить из допустимого для каждой из них диапазона:

$$x_{1\min} \leq x_2 \leq x_{1\max}; \quad \Delta x_{1\min} \leq \Delta x_1 \leq \Delta x_{1\max};$$

$$x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}; \quad \Delta x_{2\min} \leq \Delta x_2 \leq \Delta x_{2\max};$$

$$x_{m\min} \leq x_m \leq x_{m\max}; \quad \Delta x_{m\min} \leq \Delta x_m \leq x_{m\max}.$$

Число шагов времени упреждения прогноза T_y .

2. Оптимизация выбора времени упреждения прогноза T_y .

Следует разработать алгоритм сравнения решений для ряда значений T_y , например по критерию устойчивости управления, чтобы показать преимущества управления при больших значениях T_y ($T_y \approx 5 \dots 10$ лет). Предполагается, что достаточное значение $T_y \geq T_{кр}$ для каждой задачи управления постоянно. При дальнейшем увеличении времени упреждения оптимальное управление практически уже не изменяется (асимптотический закон).

Задача синтеза управления с оптимизацией прогноза состоит в том, чтобы на каждом такте выбрать такую последовательность изменения значений всех регулирующих воздействий u_i , на T_u тактов времени вперед, при которой в будущем достигается максимум заданного обобщенного показателя качества:

$$J = f(x_{1,+T_v}, x_{2,+T_v}, \dots, x_{n1,+T_v}) \rightarrow \max.$$

При управлении используются скользящий интервал упреждения. Различие в управлении при скользящем и неподвижном интервалах существенное.

В первом случае можно выбрать управление на каждом такте интервала $1 - T_y$ так, чтобы получить максимум показателя качества в конце интервала, при $t = T_y$.

Во втором случае каждый раз цель управления отодвигается на один такт вперед. При этом результат на такте с номером T_y может ухудшиться. Достижение максимума критерия оптимальности происходит позже, в области двух-трехкратного значения T_y . Цель достигается, если управление с оптимизацией прогноза проводится длительно, на протяжении времени, равного двух-трехкратному значению интервала упреждения.

После введения управления с оптимизацией прогноза его результаты через некоторое время получаются не хуже оптимизации на неподвижном интервале, в том числе и в данный момент времени.

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПРОГНОЗА ПО МЕТОДАМ СЕЛЕКЦИИ И ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Один из методов синтеза управления с оптимизацией прогноза основан на переборе вариантов возможных управлений по принципу самоорганизации (селекции). Выбор оптимального решения состоит из T_y рядов последовательных решений, отвечающих T_y интервалам времени упреждения прогноза. Для того чтобы сохранить свободу выбора для последующих решений, в каждом ряду выбирается не единственное наилучшее, а $F > 1$ лучших из них, и только в последнем T_y -ом ряду выясняется, какие из предыдущих решений оказались необходимыми для достижения единственного оптимального решения.

Существующие методы оптимального управления основаны на предположении о том, что показатель качества функционирования системы может быть рассчитан в момент принятия решения об управлении без использования аппарата статистического прогнозирования.

Алгоритмы МГУА позволяют получить выражения для статистического прогноза в детерминированной форме разностных уравнений регрессии, алгебраических или дифференциальных.

Ограничимся рассмотрением только дифференциальных уравнений регрессии, работающих при дискретном отсчете времени, по тактам. Такие уравнения могут быть получены для каждого текущего момента времени по небольшому числу экспериментальных данных за предыдущие моменты.

Как указывалось, системный, многократный дифференциальный прогноз состоит в том, что система нелинейных, разностных с запаздывающими аргументами уравнений интегрируется шаг за шагом, интервал за интервалом, на T_y интервалов вперед.

Одна из переменных системы, или некоторая функция от них, является показателем качества функционирования системы: $\varphi = x_i$, или $\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Для некоторых задач показатель качества выражается суммой значений на всем интервале прогнозирования:

$$J = \frac{1}{T_y} \sum_{i=1}^{T_y} \varphi_i.$$

Для многокритериальных задач показатель J должен быть заменен так называемым «обобщенным критерием качества». При заданных (на каждом интервале) регулирующих воздействиях μ_i и внешних возмущающих воздействиях λ_i в конце интервала интегрирования T_y можно получить вполне определенные значения всех переменных состояний и, следовательно, рассчитать показатель качества J .

Оптимизация прогноза состоит в переборе всевозможных вариантов значений управляющих воздействий μ_i на всех интервалах развития процесса от текущего момента времени до момента T_y . Значения внешних возмущающих воздействий λ_i должны быть при этом известны для каждого интервала. Их приходится прогнозировать отдельно, например по оптимальным временным трендам. Будем считать λ_i известными.

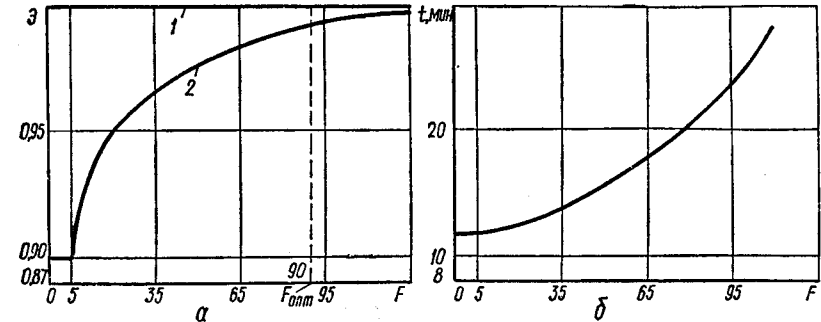


Рис. 42. График роста эффективности управления (а) с увеличением степени свободы выбора F и продолжительности счета при селекции (б): 1 — рост эффективности по динамическому программированию; 2 — то же по гипотезе селекции.

Уравнение прогноза выводится снова, а перебор управлений повторяется на каждом текущем такте с тем, чтобы адаптировать управление к возможным изменениям прогноза будущих значений всех переменных и таким образом учесть эти изменения. В этом состоит адаптация управления.

Как указывалось, оптимизация прогноза идет на скользящем интервале, содержащем T_y шагов единичных тактов времени. При каждом расчете оптимального управления начало и конец скользящего интервала сдвигаются на один шаг вперед. При этом оказывается, что максимум показателя качества достигается в области упреждения порядка (2—3) T_y . Только в некоторых случаях максимум достигается раньше, в области $t = T_y$.

Сравнение методов самоорганизации и динамического программирования. В основе метода самоорганизации управления с оптимизацией прогноза лежит гипотеза селекции. На основании этой гипотезы полный перебор всех возможных управлений можно заменить перебором некоторого количества F самых эффективных из них на каждом дискретном шаге управления. Доказательством такой возможности служат графики, подобные графику рис. 42.

Данный график относится к примеру 18, рассмотренному далее. В этом примере максимальное значение эффективности системы управления (полученное по алгоритму динамического программирования) известно и принято за единицу. Как видно из рис. 42,

увеличение числа управлений F , отбираемых на каждом шаге, приближает эффективность результирующего управления к максимально возможной по экспоненциальному закону:

$$E = (E_{\max} - E_{\min}) \left(1 - e^{-\frac{F + F_0}{\tau}}\right),$$

где $\tau = 30$; $F_0 = 5$.

Выбрав $F = 90$, получим управление, которое только на 1% хуже наилучшего. При этом объем перебора управлений будет еще настолько небольшим, что решение на машине среднего быстрого действия занимает всего полчаса. Оценку принимаемых решений нужно делать только с точки зрения будущего.

Критерий свободы выбора решений Д. Габора и управление с оптимизацией прогноза [67]. Все разновидности современного оптимального управления исходят из условия: «пусть будет хорошо сейчас, немедленно». В отличие от этого критерий Д. Габора и принцип управления с оптимизацией прогноза исходят из другой цели: «пусть будет хорошо в будущем». Выясним различие между критерием Габора и управлением с оптимизацией прогноза.

Управление с оптимизацией прогноза использует самый совершенный алгоритм прогноза для выяснения оценок с точки зрения будущего. Пользуясь этим алгоритмом, рассчитывают ряд вариантов прогноза при различных значениях регулирующих воздействий с тем, чтобы выбрать оптимальные с точки зрения будущего времени. Таким образом, будущее «прошупывается» непосредственно, при помощи наилучших по точности прогнозов.

Критерий Габора отличается тем, что при нем прогноз заменяется некоторой величиной, которую можно измерить в данный момент времени. Такой величиной является дивергенция вектора F правых частей системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику объекта управления:

$$\operatorname{div} F = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Оптимизацию дивергенции следует рекомендовать там, где динамическое программирование невозможно из-за слишком большого объема счета (в сложных многопараметрических объектах, описываемых дифференциальными уравнениями регрессии с запаздывающими аргументами, получаемыми по алгоритмам МГУА).

В основе критерия свободы принятия последующих решений Д. Габора [67] и идеи управления с оптимизацией прогноза лежит одно и то же логическое обоснование. Связанный со свободой принятия решений «фазовый объем управлений» изменяется во времени по следующему закону:

$$V_t = (1 + \tau \operatorname{div} \bar{V}) V_0.$$

В одномерном случае дивергенция равна производной $\frac{dF}{dx}$ (рис. 43). В системе имеется одно регулирующее воздействие x_1 , тогда фазовый объем превращается в отрезок на оси x .

На рис. 43, а изображен случай «благоприятного» монотонного изменения фазового объема за два интервала времени: как на первом, так и на втором интервале лучшим по критерию свободы оказывается решение x_{-1} .

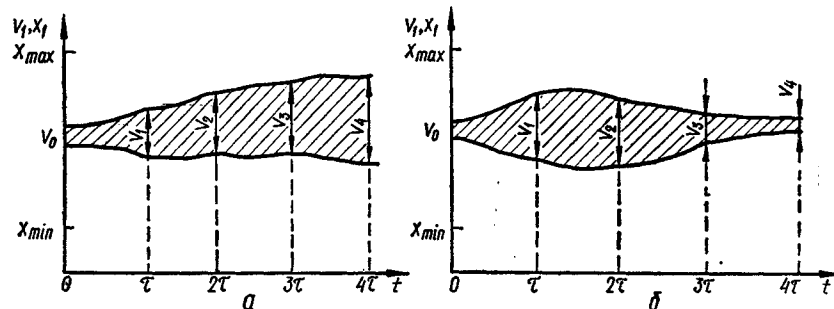


Рис. 43. Типы траекторий движения системы последовательного принятия решений: а — при монотонном расширении фазового объема; б — при расширяющемся, а затем уменьшающемся фазовом объеме.

На рис. 43, б показан случай немонотонного изменения фазового объема за два интервала, когда дивергенция не может быть показателем качества принимаемого решения в начальный момент. Таким образом, критерий свободы решений может заменить собой прогноз только в сравнительно несложных системах при небольшом времени упреждения прогноза.

В реальных системах действует так называемый асимптотический закон: если интервал упреждения прогноза τ выбран достаточно большим, то самый лучший выбор решения в момент $t = 0$ по критерию свободы принятия решений (максимума дивергенции) не изменяется при дальнейшем увеличении этого интервала. Действие системы оптимизации дивергенции приводит к ее возрастанию, а затем — к стабилизации уровня.

Случай, показанный на рис. 43, б, возможен только при недостаточной величине интервала τ .

Свобода выбора и эффективность. Связь критерия свободы выбора решений с основным критерием оптимизации процесса не является противоречивой: чем больше свободы выбора решений будет на последующих рядах селекции, тем выше эффективность процесса.

Самоорганизация управления с оптимизацией прогноза при помощи усеченного перебора вершин гиперкуба возможных управлений. Полный перебор всех возможных управлений даже при небольших

значениях интервала упреждения прогноза, порядка $T_y = 3-4$ такта, практически немислим из-за огромного объема перебора.

Первое допущение, сделанное для уменьшения объема перебора, состоит в том, что функция f_i в уравнении регрессии является достаточно гладкой, т. е. такой, что при небольших изменениях регулирующих воздействий сохраняется некоторая прямая (или обратная) зависимость между показателем качества и каждым из этих воздействий. Например, увеличение регулирующего воздействия в малых пределах вызывает только увеличение показателя качества. Поэтому все регулирующие воздействия нужно изменять в конце каждого интервала времени на небольшую постоянную величину. Такой перебор был назван «перебором вершин гиперкуба возможных управлений» [37]*.

Величину граней куба выберем на основании просмотра предыстории системы. Например, изменение регулирующих воздействий можно принять равным наибольшему (в данную сторону) их изменению, имевшему место за последние несколько лет существования системы. При этом значения шагов изменения регулирующих воздействий на каждом интервале времени должны быть заданы.

Но и при этом весьма существенном сокращении перебора его объем все же остается слишком большим. Рассмотрим пример.

Полный перебор вершин трехмерного куба. Допустим, в системе имеется три регулирующих воздействия. В этом случае куб приращений этих воздействий будет трехмерным.

Предположим, каждое регулирующее воздействие на этом кубе может принимать три значения: максимум, среднее и минимум. Тогда на первом интервале возможны $3^3 = 27$ вариантов управления.

На втором интервале получим перебор $27^2 = 724$ варианта управления, на третьем $27^3 = 724 \cdot 27$ и т. д.

Второе допущение состоит в принятии гипотезы селекции: хорошему управлению не может предшествовать очень плохое управление. Вместо полного применим селекционный отбор F лучших управлений на каждом шаге**. Так например, в случае трехмерного куба управлений при трех значениях каждого из приращений получим следующие объемы перебора:

Степень свободы $F = 3$. Перебор при $T_y = 4$ такта содержит $27 \rightarrow 3 \rightarrow (3 \times 27) \rightarrow 3 \rightarrow (3 \times 27) \rightarrow 3 \rightarrow (3 \times 27) \rightarrow 1 = 282$ варианта.

* При линейных уравнениях динамики объекта и линейном критерии достаточно перебирать только вершины гиперкуба. Средние точки граней следует перебирать только при нелинейных уравнениях.

** Буквой F здесь обозначено число вариантов, отбираемых для приращения всех регулирующих воздействий.

Степень свободы $F = 27$. При том же $T_y = 4$ получим $27 \rightarrow 27 \rightarrow (27)^2 \rightarrow 27 \rightarrow (27)^2 \rightarrow 27 \rightarrow (27)^2 \rightarrow 1 = 2288$ вариантов (вместо 27^4).

Вывод уравнений регрессии и селекции управления, дающего лучший прогноз, повторяется сначала с учетом всех последних данных на каждом интервале управления. Для экономических систем такой расчет нужно сделать в начале каждого года.

Учет ограничений. Алгоритм самоорганизации оптимального управления допускает простой учет ограничений.

Например, для каждого интервала могут быть заданы максимальные и минимальные значения (трубка допустимых значений). Тогда варианты, вышедшие за пределы трубки, не рассматриваются. Из вариантов, удовлетворяющих всем ограничениям, выбирается F лучших. Селекция идет по закону

$$d \rightarrow F \rightarrow (d \times F) \rightarrow F \rightarrow (d \times F) \rightarrow \dots \rightarrow 1; \quad F \leq d,$$

где d — число допустимых управлений.

На последнем шаге выбирается один, лучший вариант.

Нетрудно видеть, что с увеличением степени свободы F процедура селекции сводится к полному перебору управлений. Так при $F = d^n$, где n — число шагов оптимизации, схема селекции совпадает с полным перебором управлений:

$$d \rightarrow d^2 \rightarrow d^3 \rightarrow \dots \rightarrow d^{n-1} \rightarrow d^n \rightarrow 1.$$

Для некоторых объектов уравнение прогнозирования составляется по МГУА, а для других — априори задается человеком на основании детерминированного анализа причин и следствий. Ниже даны примеры синтеза управления с оптимизацией прогноза по методу самоорганизации для двух различных объектов.

В примере 18 используется интегральный критерий качества функционирования системы — его среднее значение за все интервалы прогнозирования от 0 до T_y (конец интервала закрепления); в примере 19 максимальное значение показателя качества — в конце «используемого» интервала прогнозирования (от t до $t + T_y$).

Отсюда следует, что управление с оптимизацией прогноза допускает самые разнообразные постановки и оценки его качества.

Пример 18. Управление с оптимизацией прогноза для детерминированного объекта (гидростанции)*. Рассмотрим случай, когда уравнение объекта управления настолько простое, что его априори может задать человек. Прямое моделирование (самоорганизация) по экспериментальным данным не требуется.

Пример основан на подсчете суммарного показателя эффективности на интервале времени с неподвижным концом: все процессы на гидростанции оптимизируются на интервале, начиная с текущего момента времени до 1-го июля следующего года (дата окончания весеннего паводка). Простота уравнения, небольшое число переменных и неподвижность конца интервала дает возможность применить для решения задачи оптимизации управления как метод самоорганизации, так и точ-

* Пример написан совместно с аспирантом В. А. Овчинниковым.

ный метод динамического программирования, и сравнить результаты предлагаемого и общепринятого метода (рис. 41).

Каскад водохранилищ ГЭС — это последовательное соединение отдельных динамических объектов. Каждое j -е водохранилище описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dW_j}{dt} = Q_{j-1} - Q_j + F_j; \quad W_j(0) = W_j^0; \quad j = 1, m,$$

где W_j — объем водохранилища; Q_{j-1} — приток воды в водохранилище; Q_j — сброс воды через плотину; Q_0 — приток воды в первом (по течению) водохранилище каскада; F_j — боковая приточность; m — число водохранилищ.

Управляющим воздействием объекта является сброс воды Q_j (рис. 44). В качестве переменной состояния обычно учитывается не объем W_j , а гораздо более точно измеряемая величина Z_j — уровень воды у плотины (уровень верхнего бьефа). Объем W_j связан с уровнем Z_j нелинейной зависимостью:

$$W_j = W_j(Z_j, \bar{Q}_j); \quad j = 1, m,$$

где $\bar{Q}$ — расчетный расход воды через водохранилище. В расчетах для водохранилищ с относительно малым временем добегания воды, например Днепровских, принимают

$$\bar{Q} = Q_j; \quad j = 1, m.$$

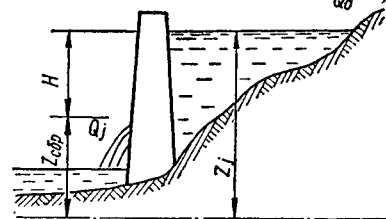


Рис. 44. К пояснению примера 18.

Указанные зависимости называются кривыми динамических объемов и обычно приводятся в нормативных материалах по данному водохранилищу. Решая указанные уравнения совместно, получаем

$$\frac{\partial W_j}{\partial Z_j} Z_j + \frac{\partial W_j}{\partial Q_j} Q_j = Q_{j-1} - Q_j + F_j; \quad Z_j(0) = Z_j^0; \quad j = 1, m,$$

где Z_j^0 — задаваемые начальные значения уровней.

Рассмотрим задачу оптимального управления на примере Каховского водохранилища. Аппроксимация кривых динамических объемов Каховского водохранилища, полученная по методу наименьших квадратов,

$$W = 2,3 - 0,14Z + 0,11Q + 0,07Z^2,$$

где W , км³; Z , м; Q , 10³ · м³/с.

Уравнение динамики для Каховского водохранилища можно записать так

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{Q^0 - Q}{0,14Z - 0,14}; \quad Z(0) = Z^0$$

при допущении, что F — пренебрежимо мало.

Запишем это уравнение приближенно, в разностной форме:

$$Z_i = \frac{(Q_i^0 - Q_i)}{0,14Z_i - 0,14} \Delta t + Z_{i-1},$$

где $\Delta t = 10^6$ с — шаг дискретизации времени.

При определении оптимального управления годовым стоком расчетные интервалы времени принимаются равными одному месяцу, что равно $\approx 2,6 \Delta t$. Особенность расчетов заключается в том, что на каждом интервале времени сброс Q и приток Q_i^0 считаются постоянными:

$$\left. \begin{aligned} Q^0(t) &= Q_i^0 = \text{const}; \\ Q(t) &= Q_i = \text{const}; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } t_{i-1} < t < t_i, \\ &i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где Q_i^0 — годовой гидрограф приточности (задается с помощью специального прогноза); $n = 12$ — количество месяцев в году.

Задача управления водохранилищем ГЭС с оптимизацией прогноза на один год заключается в выборе такого вектора управлений Q_i , $i = \overline{1, 2}$, который обеспечивает максимум выработки электроэнергии за год.

При этом должны соблюдаться следующие ограничения в виде неравенств, задаваемых для каждого расчетного интервала:

$$Q_{i\min} \leq Q_i \leq Q_{i\max};$$

$$Q_{bi\min} \leq Q_{bi} = \frac{dW}{dt} \leq Q_{bi\max};$$

$$Z_{i\min} \leq Z_i \leq Z_{i\max};$$

$$E_{i\min} \leq E_i = N_i \cdot 2,6 \Delta t \leq E_{i\max}.$$

Кроме этого, требуется соблюдение ограничения типа

$$Z_0 = Z_n,$$

т. е. равенства уровней в водохранилище в начале и конце рассматриваемого периода времени (года).

Мощность N_i , вырабатываемая гидротурбинами, зависит от гидравлического напора и рабочего расхода воды Q_i . Напор H — это разность между текущим уровнем воды Z_i и уровнем сброса $Z_{сбр}$, т. е. минимальный уровень.

В практических расчетах зависимость

$$N_i = N_i(H, Q)$$

аппроксимируется полиномом четвертой степени. В данном примере считаем, что среднеинтервальная мощность N_i пропорциональна среднеинтегральному напору H_i и расходу воды Q_i :

$$N_i = CH_i Q_i = C \left(\frac{Z_{i+1} + Z_i}{2} - Z_{сбр} \right) Q_i,$$

где коэффициент $C = 0,01$ мВт · с/м², а уровень $Z_{сбр} = 0$ и постоянен в течение года.

Если принять, что рабочий сброс Q в каждом i -ом интервале времени может принимать лишь одно значение из допустимого числа дискретных управлений $\{Q_k\}$, $k = \overline{1, d}$, то водохранилище, как объект управления, представляет собой чисто дискретную систему марковского типа. В этом случае расчет оптимального вектора управлений $Q_i \in \{Q_k\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, d}$, максимизирующего целевую функцию

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} N_i \cdot 2,6 \Delta t,$$

при соблюдении указанных выше ограничений можно выполнить как с помощью метода динамического программирования, так и по описанному алгоритму самоорганизации. Оптимальные траектории, вычисленные по методу динамического программирования, изображены на рис. 45, 46. Субоптимальные траектории, полученные по алгоритму самоорганизации при степени свободы выбора $F_{\text{опт}} = 90$, показаны на рис. 42 (при этом уход от оптимального решения не превышает 1%). Точность решения подсчитывалась по формуле

$$\frac{\max E_{\text{д.пр}} - E_{\text{сел}}}{\max E_{\text{д.пр}}} \cdot 100\%.$$

Различие в траекториях уровня и расхода воды, найденных по методу динамического программирования и по алгоритму самоорганизации (селекции), объясняется не только различием методов, но и пологостью вершины экстремума целевой функции E .

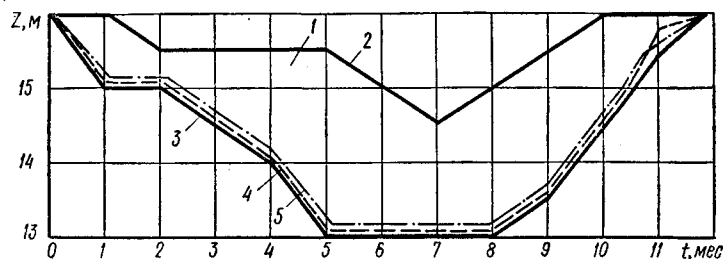


Рис. 45. Оптимальное управление на плоскости «уровень — время»: 1 — область допустимых состояний; 2 — максимальный уровень; 3 — минимальный уровень; 4 — уровень, полученный по методу динамического прогнозирования; 5 — уровень, полученный по гипотезе селекции.

Годовой гидрограф Q_i^0 , $i = \overline{1, 12}$ принимался равным гидрографу 50%-й водообеспеченности Днепровского стока. Ограничения на уровне Z_i , $i = \overline{1, 12}$ принимались в соответствии с существующими ограничениями на Каховском водо-

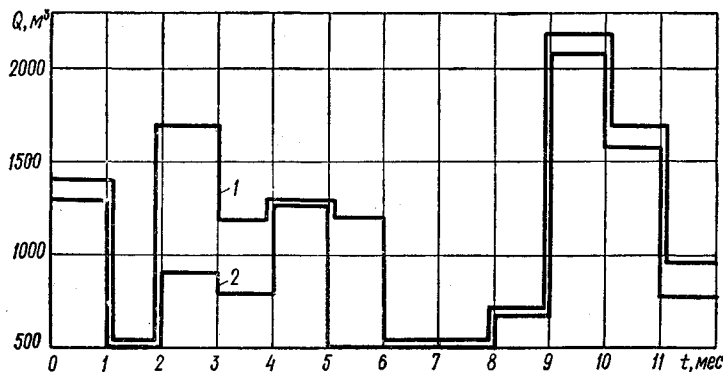


Рис. 46. Оптимальное управление на плоскости «расход воды — время»: 1 — расход, полученный по методу динамического прогнозирования; 2 — расход, полученный по гипотезе селекции.

хранилище. Ограничение в виде равенства уровней в начале и конце расчетного периода принималось равным 16 м. Оптимальные управления Q_i , $i = \overline{1, 12}$ выбирались из дискретного множества

$$\{Q_k\} = \{500, 600, \dots, 2700\}, \quad k = \overline{1, 23}$$

с интервалом дискретизации 100 м³/с. Нижняя и верхняя границы расхода, 500 и 2700 м³/с, определялись соответственно требованиям минимальных санитарных попусков в нижний бьеф водохранилища и максимальной пропускной способностью гидроагрегатов.

Как указывалось, целесообразность и допустимость принятия гипотезы селекции проверяется просчетом ряда вариантов прогноза при постепенном увеличении степени свободы выбора F . Сначала, при малых значениях показателя степени свободы, достигаемое значение показателя качества функционирования системы быстро увеличивается, что и является доказательством преимуществ «гибкого» планирования по сравнению с «жестким» при $F = 1$. Если при постепенном увеличении степени свободы, начиная с некоторого ее значения, показатель качества почти не увеличивается, то это значение и является оптимальной степенью свободы данной системы.

Результаты численных расчетов показывают, что целевая функция растет с увеличением числа степени свободы выбора последующих решений F и сходится к максимальному значению, полученному по методу динамического программирования (см. рис. 43). Повышение степени свободы F положительно сказывается на точности решения, но в свою очередь увеличивает объем вычислений. Практически для каждой задачи существует своя оптимальная степень свободы выбора последующих решений $F_{\text{опт}}$, после которой увеличение числа F , т.е. увеличение числа отбираемых по принципу селекции управлений в каждый дискретный момент времени, почти не отражается на увеличении общей целевой функции.

На рис. 43 видно, что при достаточной величине свободы выбора решений многорядная селекция эквивалентна полному, однорядному перебору всех возможных вариантов управлений.

О синтезе управления с оптимизацией прогноза по методу динамического программирования. Процедура динамического программирования в рассмотренном примере заключается в полном просчете всех возможных управлений для дискретных значений уровня. Если при динамическом программировании необходимо решить задачу оптимизации в обратном направлении, причем по единственному варианту, то до этого должен быть сделан полный расчет всех возможных решений (с учетом ограничений) в прямом направлении. Селекционный алгоритм устраняет именно этот полный расчет. В прямом направлении рассчитываются только F лучших решений, а в обратном, как и при динамическом программировании, — один, единственный оптимальный вариант. После того, как значения показателя качества управления рассчитаны для всех управлений, можно выбрать (начиная «с конца» или «с начала») единственное управление, потому что согласно принципу оптимальности выбор оптимального управления (из всех возможных) на каждом этапе дает максимум суммарного показателя качества на всех этапах. Число рассчитываемых управлений растет по закону

$$23i (Z_{\max} - Z_{\min}) \cdot \frac{1}{\Delta Z}, \quad i = \overline{1, 12}.$$

Процедура, соответствующая принципу селекции, отличается тем, что на каждом этапе отбираются не все возможные, а только некоторое число F наиболее эффективных управлений:

$$23 \rightarrow F \rightarrow F^2 \rightarrow F \rightarrow F^2 \rightarrow F, \dots, F = 23.$$

Если число F достаточно велико, то результаты синтеза управления почти одинаковые.

Общий перебор вариантов управлений при использовании динамического программирования определяется выражением

$$B_{д.пр} = d \sum_{i=1}^n Z(i),$$

где d — число допустимых дискретных управлений (расходов); $Z(i)$ — число рассматриваемых дискретных состояний (уровней) в i -ом интервале времени; n — число интервалов времени.

Перебор вариантов управлений при использовании селекции и заданном числе F , удовлетворяющим условию $F \ll d^2$, определяется выражением

$$B_{ссл} = d + dF(n-1).$$

Сравнивая выражения $B_{д.пр}$ и $B_{ссл}$, нетрудно видеть, что при условии

$$\sum_{i=1}^n Z(i) \gg F(n-1)$$

(а это практически всегда выполняется при решении многомерных задач оптимизации и небольшом шаге дискретизации ΔZ) перебор вариантов управлений при использовании селекции гораздо меньше, чем при динамическом программировании, т. е. $B_{ссл} \ll B_{д.пр}$. Кроме того, при решении задач оптимального управления многомерными дискретными объектами с помощью селекции в памяти машины необходимо хранить только небольшое число F наилучших управлений, вычисляемых на каждом шаге, в то время как при использовании динамического программирования в памяти машины необходимо хранить гораздо большее число $Z(i)$ оптимальных управлений, соответствующих различным дискретным состояниям объекта, что практически затрудняет применение метода динамического программирования для многомерных объектов.

Пример 19. Самоорганизация модели и синтез управления (с оптимизацией прогноза) газовым режимом Каховского водохранилища *.

В примере рассматривается сложный стохастический процесс — газовый режим водохранилища. Программа вычислений основана на принципах прямого моделирования: на вход машины поступают экспериментальные данные, — на выходе получается закон оптимального управления. Синтез структуры и уравнений

управления находятся внутри программы и не требуют участия человека. Решается задача самоорганизации системы дифференциальных уравнений регрессии, выражающих объективный закон изменения газового режима водохранилища по малому числу экспериментальных данных, а также задача синтеза управления с оптимизацией прогноза. Оптимизация идет на скользком интервале от текущего момента времени t до $t = T_y$. Целью оптимизации является максимальное значение показателя качества в конце интервала.

Физические законы развития газового режима водохранилища можно открыть, используя принцип самоорганизации, при помощи вычислительной машины: они принимают форму дифференциальных уравнений регрессии. Система дифференциальных уравнений была получена с использованием полиномиальных алгоритмов МГУА. При этом машине сообщались только экспериментальные данные, полученные на данном и на других водохранилищах, близких по классу. Априорное задание зависимостей, связывающих переменные, не требовалось.

Пошаговое (или многократное) интегрирование системы уравнений приводит к прогнозу. Этот метод, получивший название системного многократного дифференциального прогноза (рассмотрен подробно в гл. 3), иллюстрируется примером прогноза газового режима Каховского водохранилища на четыре года вперед.

В числе переменных, влияющих на газовый режим, включим шестнадцать гидрохимических и биологических параметров, где ϕ — выходной параметр системы, v_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) — промежуточные параметры. Кроме этих параметров, в число аргументов уравнений входят четыре внешних воздействия $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 . Значения всех указанных параметров, в нормированном по отклонению от средних виде, приведены в табл. 31 *.

Основная особенность подхода к данной задаче в том, что дифференциальные уравнения регрессии являются общим законом, действительным для всех водохранилищ средней полосы СССР, поэтому данные по Кременчугскому и Рыбинскому водохранилищам использовались для прогноза газового режима Каховского водохранилища.

Данные о количестве биомассы сине-зеленых водорослей в Рыбинском водохранилище были получены в Институте биологии внутренних вод АН СССР (г. Борок). Аналогичные данные по Кременчугскому водохранилищу восстановлены по методу экспертных оценок («Делфи»).

Восстановление данных о количестве биомассы сине-зеленых водорослей в Кременчугском водохранилище по методу экспертных оценок. Степень цветения (количество биомассы) v_3 водорослей в Кременчугском водохранилище является одной из переменных, труднее всего поддающихся оценке. Она должна измеряться биомассой водорослей, плавающих в верхних слоях водохранилища. Иногда для измерения используется способ аэрофотосъемки. Пятна сине-зеленых водорослей фотографировались с самолета, а измерение биомассы в центре каждого пятна с последующим подсчетом и усреднением по отдельным частям водохранилища дает оценку степени цветения. Такой способ измерения степени цветения является весьма трудоемким и потому реализуется нерегулярно.

Оценку степени цветения водохранилища получили по методу экспертных оценок. Этот метод заключался в том, что 10-ти научным сотрудникам, участникам биологических экспедиций на водохранилищах, предлагалось оценить (по памяти) цветение Кременчугского водохранилища по пятнадцатибальной шкале (табл. 32). Используя эту шкалу, а также опорные данные Института гидробиологии УССР, получили градуировочную кривую $b = 157,5k^2$, где b — биомасса сине-зеленых водорослей, mg/m^3 , k — средняя оценка экспертов.

Самоорганизация математической модели. Для переменных, указанных в табл. 31, были подсчитаны приращения за год, т. е. $\Delta\phi$ и Δv_i . Модель синтезиро-

* Пример написан совместно с аспирантом Н. В. Гулян.

* Указанные в таблице параметры наиболее полно представлены в гидрологических ежегодниках.

Таблица 31

Параметры	Обозначения	Единицы измерений	Исходные			
			Кременчугское			
			1962	1963	...	
Содержание O_2	φ	мг/л	0,759	—0,354	...	
Кислотность pH	v_1	мг/л	0,025	—0,003	...	
Содержание CO_2	v_2	мг/л	0,225	—0,332	...	
Биомасса сине-зеленых водорослей	v_3	мг/л	0,526	0,997	...	
Сумма ионов	v_4	мг/л	0,271	0,106	...	
Окисляемость пермангоната	v_5	мг/л	—0,007	0,164	...	
Жесткость общая	v_6	мг·скв	0,124	0,156	...	
Осадки на зеркало	λ_1	10^6 м ³	—0,477	—0,544	...	
Испарение	λ_2	10^6 м ³	—0,920	—0,163	...	
Приток — сток	μ	км ³	1,383	2,074	...	

валась в виде системы дифференциальных уравнений в конечно-разностной форме:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = f_1(\varphi_{1,0}, \varphi_{1,-1}, \dots, \varphi_{1,-\tau},$$

$$v_{1,0}, v_{1,-1}, \dots, v_{1,-\tau},$$

$$\dots$$

$$\lambda_{1,0}, \lambda_{1,-1}, \dots, \lambda_{1,-\tau});$$

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta t} = f_i(\varphi_{1,0}, \dots, \varphi_{1,-\tau},$$

$$v_{1,0}, \dots, v_{1,-\tau},$$

$$\dots$$

$$\lambda_{2,0}, \dots, \lambda_{1,-\tau}),$$

где $\Delta t = 1$ год; $i = 1, 2, 3, 4$; v — от v_1 до v_6 ; τ — указывает, с каким сдвигом назад взята данная переменная (здесь $\tau \leq 2$). Значения всех аргументов брались в нормированном, по отклонению от среднего, виде.

Дифференциальные уравнения рассматривались как алгебраические соотношения (в качестве уравнения регрессии), оценки коэффициентов которых восстанавливаются по МГУА.

Таблица 32

Шкала оценок степени цветения водохранилища

Оценка цветения	0,66	1,00	1,33	1,66	2,00	2,33	2,66	3,00	3,33	3,66	4,00	4,33	4,66	5,00	5,33
Баллы	—1	1	+1	—2	2	+2	—3	3	+3	—4	4	+4	—5	5	+5

данные по годам (нормированные в отклонениях от среднего) для примера 19

водохранилище		Рыбинское водохранилище					Среднее значение
1968	1969	1960	1961	...	1968	1969	
0,044	0,101	0,05	0,16	...	0,402	0,244	9,532
0,087	0,053	—0,02	—0,05	...	—0,036	—0,026	7,548
—0,052	—0,113	—0,11	—0,37	...	0,361	0,110	7,566
0,455	0,619	—0,71	—0,62	...	—0,665	—0,443	1723,1
0,323	0,227	—0,29	—0,23	...	—0,22	—0,172	197,9
—0,281	—0,113	—0,12	0,05	...	0,187	0,133	11,122
0,332	0,268	—0,22	—0,12	...	—0,251	—0,140	2,349
—0,421	—0,427	—0,32	0,70	...	0,500	0,402	1624,125
—0,212	—0,218	0,25	0,36	...	0,219	—0,011	1840,56
—0,75	—0,75	—0,86	—0,80	...	0,377	1,240	2,774

Основными переменными, характеризующими газовый режим водохранилища, являются: φ_1 — содержание кислорода O_2 ; v_1 — кислотность pH; v_2 — содержание углекислоты CO_2 ; v_3 — биомасса сине-зеленых водорослей.

Для этих переменных на ЭВМ по программе [15] синтезирована следующая система линейных дифференциальных уравнений регрессии:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0,47 - 0,306\varphi_{1,0} + 0,204\varphi_{3,0} - 0,141v_{2,-0} + 0,073v_{3,-2} + 0,2v_{6,0} +$$

$$+ 0,112v_{12,-1};$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -0,0112 - 0,04\varphi_{1,-2} - 0,148\varphi_{2,0} - 0,038\varphi_{3,-2} - 0,04v_{2,-2} +$$

$$+ 0,034v_{9,-1};$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = 0,03 - 0,884\varphi_{3,0} + 0,724v_{1,-1} + 0,29v_{5,-1} + 0,128v_{6,-1} + 1,57v_{9,-0};$$

$$\frac{d\varphi_4}{dt} = -0,046 + 0,195\varphi_{3,0} - 0,48v_{2,-1} - 0,14v_{5,-2} - 0,122v_{6,0} + 0,5v_{6,-1} +$$

$$+ 0,67v_{9,-2}.$$

Используя полученную систему дифференциальных уравнений, был сделан прогноз развития газового режима Каховского водохранилища по алгоритму системного многократного дифференциального прогноза [15].

Особенности алгоритма системного многократного дифференциального прогноза. Вычисление оценок коэффициентов выполнялось по универсальной программе самоорганизации (без «протекции» отдельным переменным) [15]. Многорядный алгоритм МГУА позволил оставить в уравнениях регрессии только наиболее существенные переменные. Использовался третий способ регуляризации, при котором в обучающую последовательность были включены десять точек, имеющих большее значение дисперсии от среднего. В проверочную последовательность были включены семь точек с меньшим значением дисперсии.

В данном примере в обучающую последовательность, при синтезе первого дифференциального уравнения, попали следующие точки (по годам):

Кременчугское водохранилище 1962, 1964, 1966, 1967, 1968
Рыбинское » 1961, 1963, 1967, 1968, 1969

В проверочную последовательность вошли точки:

Кременчугское водохранилище 1963, 1965, 1969
Рыбинское » 1960, 1962, 1964, 1965

Подобные разбиения были получены также и для остальных уравнений: для каждого уравнения было выполнено свое, отдельное разделение точек.

Выбор прогнозирующей модели выполнялся по методу, предусматривающему минимизацию ошибок $\Delta^2(1)$ и $\Delta^2(2)$ на плоскости $r-S$ (где r — число рядов селекции, S — сложность частного описания). Для прогноза рекомендуется выбирать точку $\Delta^2(2)_{\min}$.

Чтобы определить $\Delta^2(2)_{\min}$, задаемся определенным временем упреждения прогноза T_y (в примере $T_y = 4$ года). Пользуясь таблицей исходных данных

Таблица 33

Значения ошибок $\Delta^2(1)$ и $\Delta^2(2)$ при среднесрочном прогнозировании ($T_y = 4$ года)

Параметры	Число членов частных описаний	Ряды селекции, r							
		1		2		3		4	
		$\Delta^2(1)$	$\Delta^2(2)$	$\Delta^2(1)$	$\Delta^2(2)$	$\Delta^2(1)$	$\Delta^2(2)$	$\Delta^2(1)$	$\Delta^2(2)$
φ	3	0,70	5,40	0,30	2,30	0,25	0,6	0,23	1,7
	4	0,35	2,50	0,22	1,00	0,13	1,5	0,10	1,0
	6	0,80	—	0,40	—	0,15	0,8	0,07	—
v_1	3	0,04	0,15	0,03	0,16	0,03	0,08	0,03	0,10
	4	0,02	0,90	0,01	0,07	0,01	1,08	0,01	0,10
	6	0,03	—	0,02	0,09	0,01	—	0,01	—
v_2	3	6,60	29,0	6,70	25,7	4,00	14,1	3,50	10,8
	4	5,00	40,0	0,70	50,0	2,00	22,0	0,80	24,0
	6	7,00	—	2,90	—	1,40	—	0,50	—
v_3	3	3,40	63,0	4,10	124	2,40	115	2,30	125
	4	3,60	78,0	1,84	116	1,13	33,5	1,22	84,0
	6	3,60	—	1,80	—	0,19	45,0	0,10	—

Примечание. Минимальные значения ошибки выделены рамкой.

по двум водохранилищам, можно сделать 13 прогнозов, каждый на четыре точки вперед, и вычислить ошибку каждого прогноза. Величина $\Delta^2(2) = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} \Delta^2(2)_i$

(где i — номер прогноза) может служить оценкой точности прогнозирующей модели на заданное время упреждения T_y . Таким образом заполнялась табл. 33.

В первой строке, соответствующей числу членов частных описаний «3», даны ошибки $\Delta^2(1)$ и $\Delta^2(2)$ для синтеза уравнений 1-, 2-, 3- и 4-го рядов селекции, при этом частным описанием служил линейный полином вида $y = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j$ (три члена); во второй строке «4» показаны результаты применения модели с частным полиномом вида

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j \text{ (четыре члена).}$$

В третьей строке «6» частным описанием служил квадратичный полином

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j + a_4 x_i^2 + a_5 x_j^2 \text{ (шесть членов).}$$

Табл. 33 служит для выбора прогнозирующей модели содержания кислорода по минимуму $\Delta^2(2)$ при заданном $T_y = 4$ года. В этой таблице приведены ошибки $\Delta^2(1)$ и $\Delta^2(2)$ выходного параметра φ и трех основных входных — кислотности pH, содержания CO_2 и биомассы сине-зеленых водорослей.

При увеличении времени упреждения прогноза преимущество получают линейные уравнения.

Одним из достоинств системного многократного дифференциального прогноза является то, что для экзаменационной последовательности (на которой определяется $\Delta^2(2)$) не требуется оставлять часть точек, а значит, сокращать выборку, на которой ведется обучение. Для определения $\Delta^2(2)$ используются данные, применяемые для обучающей и первой проверочной последовательностей. Объясняется это тем, что при построении прогнозов используются приращения переменных, а не сами переменные*.

Второе достоинство дифференциального прогноза — малое сглаживающее действие по сравнению с другими алгоритмами прогноза.

Прогноз развития газового режима Каховского водохранилища. По данным Кременчугского и Рыбинского водохранилищ синтезируем прогноз для Каховского водохранилища. Значение первой разности в каждой точке определяется следующим образом:

$$\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta t} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t},$$

где v — значение параметра, нормированное по отклонению от среднего; i — номер параметра; j — номер точки; $\Delta t = 1$ год, откуда

$$v_{i,j+1} = v_{i,j+1} (1 + v_i).$$

Переходя от нормированных величин к абсолютным, получим

$$v_{i,j+1} = v_{i,j+1} (1 + v_i),$$

где $v_{i,j+1}$ — значение параметра в будущем году.

Для вычисления разностей использовалась система из шестнадцати уравнений. Повторяя многократно эту процедуру, можно получить прогноз развития газового режима водохранилища на желаемое количество лет если для этих лет заданы предлагаемые значения внешних воздействий λ_j .

Начальные условия — значения всех параметров и внешних воздействий за 1969, 1970 и 1971 гг. для Кременчугского водохранилища приведены в табл. 34, предполагаемые значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 — в табл. 35. Используя эти данные, полу-

* Подробнее о восьмом способе регуляризации см. в гл. 2.

Таблица 34

Исходные значения параметров Каховского водохранилища (нормированные) и прогноз изменения возмущающих воздействий λ_1 , λ_2 , λ_3

Параметры	Годы						
	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
φ	-0,02	0,22	0,33	—	—	—	—
v_1	0,05	0,10	0,03	—	—	—	—
v_2	-0,06	-0,09	-0,71	—	—	—	—
v_3	0,40	1,24	1,41	—	—	—	—
v_4	0,37	0,67	0,50	—	—	—	—
v_5	-0,35	-0,27	-0,22	—	—	—	—
v_6	0,22	0,52	0,13	—	—	—	—
v_7	-0,42	-0,54	-0,29	—	—	—	—
v_8	-0,14	-0,14	-0,25	—	—	—	—
v_9	1,26	-1,72	-0,99	—	—	—	—
λ_1	—	—	—	-0,50	-0,49	-0,41	-0,28
λ_2	—	—	—	0,04	-0,18	-0,14	-0,18
λ_3	—	—	—	-0,87	-0,22	-0,01	-0,78

Таблица 35

Результаты прогнозирования

Годы	1966	1967	1968	1969
Прогноз	0,235	0,227	0,202	0,187
Действительное значение	0,251	0,245	0,252	0,252
Ошибка	0,016	0,018	0,050	0,065

чили многократный прогноз развития газового режима Каховского водохранилища с 1961 по 1964 гг. (по данным до 1960 г. включительно).

Кривые изменения содержания кислорода, pH, CO_2 и биомассы сине-зеленых водорослей показаны на рис. 47.

Управление газовым режимом с оптимизацией прогноза. Рассмотрим пример расчета оптимального управления, при котором регулирующее воздействие выбирается для оптимизации прогноза режима. В качестве регулирующего воздействия был принят среднегодовой обмен воды (разность между притоком и стоком); в качестве показателя качества функционирования водохранилища — содержание кислорода через 4 года (в конце скользящего интервала). Среднегодовой обмен воды изменяется ежегодно, но эти изменения не превосходят следующие предельные значения: $-3,66 \leq \Delta \mu \leq 4,88$.

Разделим этот интервал на D уровней (в данном примере $D = 10$). Начальному значению регулирующего воздействия μ_0 придадим также D различных уровней: $\Delta \mu_i$ ($i = 1, \dots, D$).

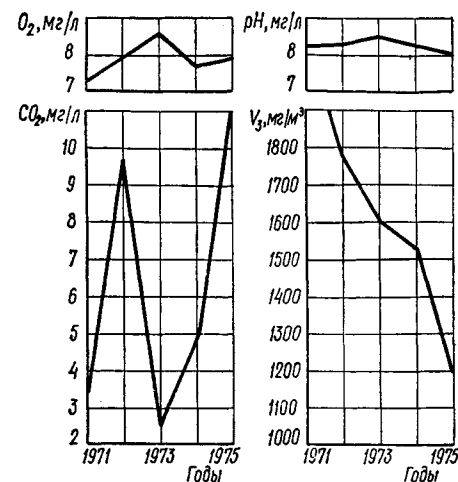


Рис. 47. Прогноз величин O_2 , pH, CO_2 и биомассы сине-зеленых водорослей для Кременчугского водохранилища.

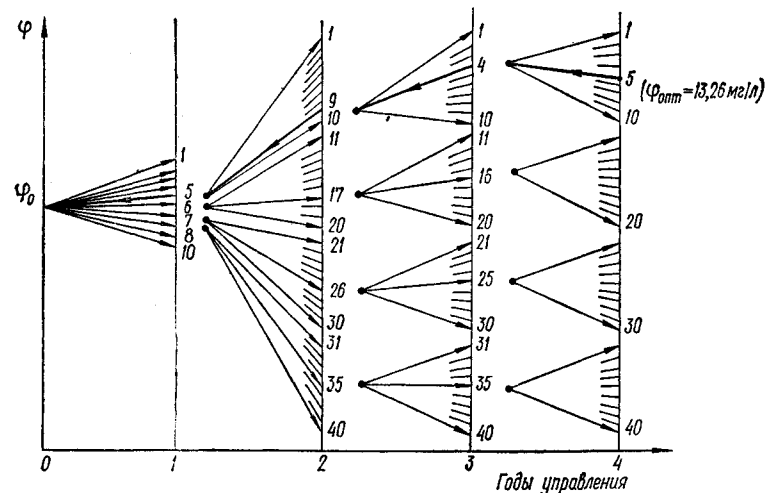


Рис. 48. Синтез управления с оптимизацией прогноза при $F = 4$, $D = 10$.

* Разделение интервала изменения регулирующих воздействий на ряд уровней (более двух) имеет смысл только при нелинейных уравнениях динамики объекта. Линейный алгоритм выбирает крайние значения и не изменяет своего выбора, по крайней мере, до поступления новых данных.

По системе уравнений, описанных выше, для каждого уровня μ_i можно подсчитать содержание кислорода на 1963 г.
Учтя ограничения:

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max};$$

$$\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max};$$

выберем на следующий шаг только F таких ($F \leq D$) уровней управляющих воздействий μ_j ($j = 1, 2, \dots, F$), которым соответствуют наибольшие значения выходной величины φ (содержания кислорода). На следующем шаге придадим выбранным уровням опять по D уровней приращений; при этом получим FD вариантов управления. Из всех вариантов снова выбираем F наилучших (в смысле максимума показателя качества) вариантов, удовлетворяющих ограничениям. Повторяем вышеописанную процедуру $N_y \Rightarrow T_y$ раз. На последнем шаге из FD вариантов выбираем тот, который дает максимум φ . Осуществив обратный просмотр управлений, получим искомую единственную оптимальную цепочку управлений. Граф поиска оптимального управления при заданных D и F показан на рис. 48. Меняя F , можно получить на последнем шаге различные значения $\varphi_{\text{опт}}$ (T_y). Зависимость $\varphi(T_y) = f(F)$ показана на рис. 49.

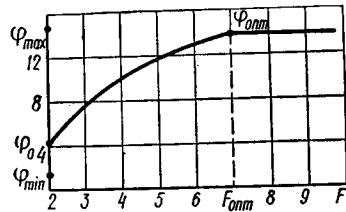


Рис. 49. Зависимость φ (в момент $t = T_y$) от степени свободы выбора F .

на рис. 48. Меняя F , можно получить на последнем шаге различные значения $\varphi_{\text{опт}}$ (T_y). Зависимость $\varphi(T_y) = f(F)$ показана на рис. 49.

Выбираем $F_{\text{опт}} = 4$, так как дальнейшее увеличение степени свободы выбора решений существенно не увеличивает показатель качества.

Установив таким образом $F_{\text{опт}}$, выбираем управляющее воздействие на первом интервале. Через год расчеты повторяются, но теперь φ_{max} находим для $(T_y + 1)$ -го года и т. д. В этом и состоит скользящий интервал управлений. В примере $T_y = 4$ года. Это означает, что в конце каждого года назначаем такой водообмен водохранилища, который обеспечит максимально возможное содержание кислорода через два-три интервала упреждения прогноза.

Показанная на рис. 48 процедура поиска служит только для выбора управления на одном первом такте. При наступлении каждого следующего такта подобная процедура повторяется, причем уравнения синтезируются заново, с учетом новых данных. Цель оптимизации также отодвигается на один такт дальше. Именно поэтому эффективность управления с оптимизацией прогноза достигает максимума только после длительного применения такого управления.

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПРОГНОЗА ПО УПРОЩЕННОМУ ВАРИАНТУ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Значение развития объективных методов для моделирования экономических систем с целью управления. Новая ориентация автоматического управления на решение проблем среды, экологии, народонаселения, экономики и социологии, которые теперь стоят перед обществом, должна создать теорию на новой основе и привлечь аппарат, необходимый для решения указанных проблем. Таким новым

подходом и является теория самоорганизации (многорядной селекции) математических моделей и управления. Ниже, в примере, принцип самоорганизации использован для получения системы дифференциальных уравнений регрессии, которые являются наиболее точной математической моделью экономической системы Англии, получаемой по данным за 1950—1965 гг. Список переменных был выбран соответственно модели детерминированного типа, предложенной ранее проф. П. Парксом и Ф. Платтом [86, 87]. Следовательно, используется комбинированный (детерминистический и самоорганизации) метод идентификации, при котором список возможных составляющих характеристического вектора берется из соответствующих детерминистических работ, основанных на анализе причин и следствий.

Алгоритмы самоорганизации управления можно назвать объективными потому, что они основаны на использовании минимального количества легко согласуемой априорной информации и не требуют никаких субъективных человеческих предложений о самой экономике. Кибернетики, пользуясь такими алгоритмами, могут теперь «заговорить одним голосом» [81], что весьма важно сейчас.

В настоящее время многие ученые убеждены, что общество, в котором кардинальные решения в области экономики принимаются в соответствии с советами вычислительной машины, невозможно. Обоснование такого мнения можно выразить так: вычислительная машина требует слишком много априорной информации, которая в значительной степени определяет собой результаты. Поэтому «кибернетики говорят разными голосами» в зависимости от принятой априорной информации. Проф. Д. Габор [81] пишет по этому поводу: «Нет гарантии, что люди прислушаются к голосу разума, во всяком случае, пока говорят много разных голосов. Но когда-нибудь научные (кибернетические) предсказания социально-экономических процессов станут действительно научными настолько, что о них можно будет заговорить в один голос, и это будет тот случай, когда предсказание будет заслушано».

«...Я верю, что голос этого нового вооруженного вычислительными машинами поколения «точных» социологов приобретет такой авторитет, что его услышат».

Для этого существует только один путь: необходимо свести к минимуму количество априорной информации, вводимой человеком в вычислительную машину. Только такой метод, основанный на минимуме детерминированной информации (которую легко согласовать с широким кругом людей), можно назвать объективным методом. Большой объем априорной информации практически невозможно согласовать с людьми различных взглядов.

Принцип эвристической самоорганизации дает такие объективные методы. В качестве примера можно указать Метод Группового

Учета Аргументов (МГУА). В вычислительную машину в качестве априорной информации вводится только так называемая «среда» решения задачи и некоторая последовательность экспериментальных данных. В «среду» входят широкий список возможных кандидатов в аргументы и перечень аппроксимирующих опорных функций. Указывается также критерий селекции моделей. Эта сравнительно небольшая априорная информация может быть довольно легко получена из обобщения опыта детерминистического метода моделирования данной задачи, что соответствует идее комбинированного подхода.

Синтез модели экономической системы. Рассмотрим следующие две задачи:

1. Синтез прогнозирующей динамической модели сложной системы в форме разностных уравнений с запаздывающими аргументами (дифференциальные уравнения регрессии). Синтез модели проведен с помощью указанных выше методов самоорганизации, причем в качестве конкретного примера взята модель экономической системы Англии.

2. Использование прогнозирующей модели для синтеза оптимального управления. В качестве примера приведено принятие решения по управлению экономикой Англии в конце 1965 г. Для адаптации к поступающим экспериментальным данным расчет управления должен быть повторен в каждом последующем году с учетом новых данных. При синтезе системы управления от вычислительной машины в качестве критерия оптимальности принята некоторая функция, определяющая состояние объекта в будущем, через заданное число тактов управления. С каждым годом цель оптимизации отодвигается на один год. Такой способ управления был назван управлением с оптимизацией прогноза.

Исходные данные для моделирования и выбора координат. Английские ученые П. Паркс и Ф. Пиатт [86, 87] установили характеристический вектор модели для экономики Англии (см. табл. 5). В этой системе имеются 21 переменная, связанные 15-ю дифференциальными и 3-мя алгебраическими уравнениями (см. рис. 26).

Выделим следующие три группы переменных:

1. Выходные (три):

$$\Phi_1 = K; \Phi_2 = K_{FG} + K_{FC}; \Phi_3 = \left(1 - \frac{W + \Pi}{1/3K}\right).$$

2. Промежуточные (тринадцать):

$$X_1 = C; X_2 = J; X_3 = J_{FG} + J_{FC}; X_4 = W; X_5 = \Pi; X_6 = S_H; \\ X_7 = S_G; X_8 = S_C; X_9 = R_6; X_{10} = R_C; X_{11} = D; X_{12} = \alpha; \\ X_{13} = M.$$

3. Регулирующие воздействия, контролируемые при управлении экономической системой (три):

$$M_1 = T_H - U; M_2 = T_C; M_3 = G.$$

Буквами $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, X_1, X_2, X_3, \dots, X_{13}, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ обозначены те же переменные, но центрированные и нормированные по средним значениям. Запаздывание измерения переменной обозначается при помощи второго индекса. Например Φ_{1-2} обозначает величину $\Phi_1 = K$, измеренную два года назад. При составлении уравнений на конец 1965 г. эта величина отсчитывается в 1963 г., т. е. $\Phi_{1-2} = 105\,534$ и т. д.

САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АНГЛИИ ПО МНОГОРЯДНОМУ АЛГОРИТМУ МГУА

Если сложность модели (измеряемая, например, по числу коэффициентов полинома) постепенно возрастает, то среднеквадратичная ошибка, измеряемая на новых (или «свежих») экспериментальных точках отдельной проверочной последовательности, проходит через ее минимумы. В процессе усложнения она сначала падает, достигает минимума, а потом возрастает. В этом состоит основное открытие новой теории самоорганизации.

Существование минимумов ошибки означает, что вычислительная машина может найти их и, следовательно, синтезировать модель оптимальной сложности без какой-либо помощи человека. Никакой априорной информации, кроме короткой последовательности экспериментальных данных, не требуется. Основная идея самоорганизации модели и реализуется этим новым способом*.

В последних работах по самоорганизации предложены некоторые другие более эффективные критерии селекции модели оптимальной сложности. Наиболее эффективными являются критерий несмещенности и критерий баланса переменных. Именно эти критерии были использованы в вычислительной программе для синтеза модели экономической системы Англии. Способ повышения сложности модели не является принципиальным. Можно предложить много способов и различных алгоритмов МГУА, отличающихся друг от друга по способу повышения сложности. В рассматриваемой задаче использовался алгоритм МГУА с линейными полиномами.

Если в алгоритмах МГУА применить линейные частные описания, то модель экономической системы получается в виде системы линейных дифференциальных уравнений регрессии вида

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta t} = f(i, v_1, v_2, \dots, v_{19}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 19,$$

* Описанный в данной работе принцип самоорганизации не имеет ничего общего с другими определениями термина «самоорганизация». Поэтому никакие предыдущие работы по самоорганизации здесь не упоминаются.

где i — время (номер такта); v — обозначение всех 19 указанных переменных (стр. 244). При учете четырех лет возможного запаздывания каждой переменной это дает всего $19 \times 4 = 76$ возможных аргументов.

По алгоритмам МГУА можно получить два типа уравнений: уравнения для прогнозирования и уравнения для управления.

Уравнения для прогнозирования представляют собой в данном случае систему из 19 дифференциальных уравнений для всех перечисленных выше переменных.

Уравнения для управления содержат 16 дифференциальных уравнений: уравнения для трех регулирующих воздействий не синтезируются. Число возможных аргументов в уравнениях управления увеличивается до 80-ти.

Ограничимся описанием синтеза уравнений управления экономической системой Англии (синтез уравнений прогнозирования по одному критерию регулярности рассматривался на стр. 162).

Способы уменьшения объема перебора. Самоорганизация или синтез системы дифференциальных уравнений управления состоит в переборе линейных уравнений при постепенном усложнении правой части, начиная от уравнений с одним аргументом до уравнения со всеми 80-ю аргументами по критериям селекции. Всего при полном переборе, реализуемом в комбинаторных алгоритмах МГУА, нужно оценить для каждого из 16-ти уравнений $C_{80}^1 + C_{80}^2 + C_{80}^3 + C_{80}^4 + \dots + C_{80}^{80} = 2^{80} - 1^*$ вариантов и выбрать единственную систему уравнений, называемую моделью оптимальной сложности. Объем полного перебора в данной задаче настолько велик, что приходится применять специальные меры для его уменьшения. Рассмотрим основные из них.

1. *Уменьшение числа аргументов в каждом уравнении.* Для этого можно применить множественно-корреляционный анализ, с тем чтобы оставить в каждом уравнении не 80, а, например, только восемь наиболее влиятельных аргументов. Число уравнений, которое после этого следует перебрать при полном переборе по критерию селекции, равно $16 (C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + \dots + C_8^8) = 16 (2^8 - 1)$.

Число аргументов можно также уменьшить детерминированным методом, используя информацию о схеме системы (см. рис. 26). При этом в каждом уравнении следует оставить только те аргументы, которые соответствуют заданной схеме без запаздывания и с четырьмя степенями запаздывания. Ниже использован именно этот прием.

2. *Применение многорядных алгоритмов МГУА вместо полного перебора.* Многорядные алгоритмы МГУА без протекции перемен-

ным пропускают некоторые из полиномов и поэтому сокращают время счета на машине. Однако они требуют применения критериев селекции, достаточно плавно изменяющихся при увеличении сложности (числа и степени аргументов) модели.

3. *Применение двухступенчатой системы селекции.* Сначала по критерию несмещенности решений селектируются, например по четыре, самые лучшие уравнения для каждой переменной, а затем из них составляются всевозможные комбинации систем уравнений. Из полученных комбинаций выбирается единственная система, наилучшим образом удовлетворяющая критерию баланса переменных, который является основным критерием селекции. Этот критерий не дает достаточно плавную характеристику в функции сложности, что позволило бы применить многорядный алгоритм селекции вместо полного перебора. В качестве вспомогательного критерия селекции с плавной характеристикой используется критерий несмещенности:

$$n_{см} = \sum_1^N (\Delta y^* - \Delta y^{**})^2 \rightarrow \min,$$

где N — число точек в табл. 5; Δy^* — решения, полученные на точках с четными номерами; Δy^{**} — решения, полученные на точках с нечетными номерами.

Критерий несмещенности селектирует дифференциальные уравнения регрессии, которые почти не зависят от выбора точек экспериментальных данных. После выбора нескольких (шести) самых несмещенных дифференциальных уравнений регрессии оценки коэффициентов в них находят, как обычно по МГУА, по всем точкам табл. 24.

В качестве основного критерия селекции (критерия баланса переменных) используется величина

$$B = \sum_{i=t_1}^{t_2} b_i^2 \rightarrow \min,$$

где
$$b_i = \left[\Phi_3 - \left(1 - \frac{W - \Pi}{1/3K} \right) \right]_i.$$

Уравнение баланса переменных выбирается эвристически. Выберем выражение для показателя качества экономической системы:

$$\Phi_3 = \left(1 - \frac{W + \Pi}{1/3K} \right).$$

Это уравнение точно выполняется во всех точках табл. 24. Найдем систему уравнений, дающую невязку не более 0,05 на всем интервале прогноза, т. е. от $t_1 = 1965$ до $t_2 = 1970$ гг.

Соответствующие комбинации дифференциальных уравнений перебирают по очереди: сначала варьируются уравнения для первой

* Напомним, что $C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m - 1$.

переменной, затем для второй, для третьей и т. д. до шестнадцатой. Всего нужно решить $16 \times 4 = 64$ систем уравнений и выбрать из них ту, которая лучше других удовлетворяет балансу переменных на интервале прогноза.

В данном примере удалось найти систему, дающую в указанном интервале при $T_y = 5$ лет невязку менее 0,05 (левая часть уравнения баланса незначительно больше правой). Ниже приводится результат селекции по двум указанным выше критериям:

Уравнения управления динамикой для экономической системы Англии (действительны на конец 1965 г.)

Показатель качества Φ :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & -0,10242 - 0,00002178X_{8,-0} + 0,0000058569X_{11,-0} - \\ & - 0,0000066203X_{11,-2} + 0,000015495X_{12,-0} + 0,000011671X_{13,-0} - \\ & - 0,000041907\mu_{1,-1} - 0,000034249\mu_{2,-0} + 0,000062443\mu_{2,+1} \\ & (3\text{-й ряд селекции}). \end{aligned}$$

Элемент «Производство» (переменные $\varphi_1 X_5 X_4$ и X_{13}) (см. рис. 26):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 = & -1967,1 + 1,4306X_{1,-1} - 0,86113X_{1,-2} + 0,060148X_{12,-1} + \\ & + 0,076288X_{12,-3} - 0,42661X_{13,-1} + 0,0018209X_{13,-3} - \\ & - 123,44T \quad (3\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X_5 = & 654,62 - 0,14084X_{8,-0} - 0,11025X_{8,-1} + 0,50749X_{11,-2} - \\ & - 0,5836X_{13,-0} + 0,52024\mu_{3,-0} + 0,25295\mu_{3,-3} \quad (3\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X_4 = & 557,62 + 2,9527X_{11,-0} + 0,061632X_{12,-1} - 0,094539X_{12,-2} - \\ & - 2,6773\mu_{1,-0} \quad (2\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{13} = & -2044,7 + 0,14393\varphi_{1,-3} - 0,43768X_{4,-0} + 0,36114X_{4,-3} - \\ & - 1,0934X_{13,-0} \quad (2\text{-й ряд}). \end{aligned}$$

Элемент «Некорпорированные производители» (переменные X_1 и X_6):

$$\Delta X_1 = -14\,62,8 + 0,34578X_{1,-1} - 223,5T \quad (1\text{-й ряд});$$

$$\begin{aligned} \Delta X_6 = & -635,85 + 0,59619X_{1,-0} - 0,50454X_{4,-0} - \\ & - 0,46807X_{11,-1} \quad (2\text{-й ряд}). \end{aligned}$$

Элемент «Корпорации» (переменные X_8 и X_{11}):

$$\begin{aligned} \Delta X_8 = & -9,6192 - 0,14827X_{6,-0} + 0,081387X_{8,-2} - 0,65699X_{10,-1} + \\ & + 0,58003X_{11,-1} \quad (2\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{11} = & -39,323 + 0,18913X_{1,-0} - 0,16435X_{4,-0} - 0,038561X_{4,-1} + \\ & + 0,044415X_{4,-2} + 0,03271\mu_{2,-0} + 3,0762T - 0,34179\mu_{2,+1} \quad (3\text{-й ряд}). \end{aligned}$$

Элемент «Правительство» (переменная X_7):

$$\begin{aligned} \Delta X_7 = & 945,92 + 1,6762X_{6,-0} - 0,071751X_{8,-2} + 0,042902X_{8,-3} - \\ & - 1,7568\mu_{1,-0} - 0,10793\mu_{1,-1} \quad (3\text{-й ряд}). \end{aligned}$$

Элемент «Банк» (переменные X_2 и X_9):

$$\begin{aligned} \Delta X_2 = & 197,82 - 0,59873X_{6,-1} + 0,85217X_{6,-2} + 0,018841X_{8,-0} - \\ & - 0,013227X_{8,-1} \quad (2\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\Delta X_9 = 26\,939 - 1,196\varphi_{2,-0} + 0,29093X_{8,-3} + 0,19749X_{12,-3} \quad (2\text{-й ряд}).$$

Элемент «Заграничные страны» (переменные φ_2 , X_{10} , X_{12} , X_9):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2 = & 7852,5 - 0,35415\varphi_{2,-1} - 1,0952X_{10,-2} + 0,10123X_{12,-0} + \\ & + 0,15806X_{12,-1} \quad (2\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{10} = & -1794,3 + 0,076537\varphi_{2,-3} - 0,027159X_{8,-2} - \\ & - 0,0016119X_{10,-3} + 0,016135X_{12,-0} \quad (2\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{12} = & -962,33 + 0,042882\varphi_{1,-1} - 0,15689X_{4,-2} - 0,16397X_{13,-0} + \\ & + 0,25798\mu_{3,-2} \quad (2\text{-й ряд}); \end{aligned}$$

$$\Delta X_9 = 42,933 - 0,10573X_{10,-0} + 0,036586\mu_{1,-0} \quad (1\text{-й ряд}).$$

Некоторые пояснения. Согласно алгоритму МГУА были селектированы 60 наиболее несмещенных переменных в каждом ряду. Процедура селекции останавливалась по «правилу левого угла», поэтому число рядов селекции различно для каждой переменной. Шесть наиболее несмещенных уравнений были выбраны на последнем ряду и опробованы во всех возможных комбинациях, чтобы получить минимум критерия баланса переменных:

$$B = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{(\Phi_i^* - \Phi_i)^2}{\Phi_i^2} \cdot 100\%,$$

$$\text{где } \Phi_i = \left(1 - \frac{W + \Pi}{1/3K}\right);$$

Φ_i^* — прогнозируемые значения Φ для 1966, 1967, 1968 и 1969 гг.; Φ_i — значения Φ , рассчитанные по уравнению баланса при прогнозируемых значениях аргумента.

При оптимизации критерий баланса переменных изменился от $B = 3,6\%$ (для наиболее несмещенной системы уравнений) до $B = 0,0071\%$ (для системы, приведенной выше). Результаты прогнозирования для последней системы (переменная Φ) указаны в табл. 35. Ошибка Δ (2) составляет величину порядка 10%.

Способ линеаризации критерия оптимальности. Выбор нелинейного критерия оптимальности вызывает ряд трудностей при использовании многих известных методов синтеза оптимального управления. В то же время алгоритмы самоорганизации математических

моделей позволяют избежать эти затруднения. Для этого в таблицу исходных данных записывается строка значений показателя качества, подсчитанная по точной, нелинейной формуле (последняя строка табл. 5). Затем по этим данным селектируется самое несмещенное линейное дифференциальное уравнение, удовлетворяющее критерию баланса переменных (первое уравнение селектированной управляющей модели).

О принципиальной возможности управления экономической системой от вычислительной машины, программируемой по методу самоорганизации управления. Рассматриваемый пример показывает определенные преимущества (возможного в условиях планируемой экономики) централизованного управления экономикой Англии по советам вычислительной машины, программируемой по принципу самоорганизации модели и управления с оптимизацией прогноза. Если бы социальная система Англии допускала это, то управление экономикой страны можно было бы автоматизировать, используя вычислительную машину. В этом разделе показано возможное направление разработки эффективных алгоритмов управления. Объективные, т. е. не зависящие от мнения автора, методы синтеза моделей по принципу самоорганизации применимы для изучения любых экономических систем.

Дифференциальные уравнения регрессии можно использовать при любом критерии оптимальности и при любой процедуре синтеза оптимального управления (принцип Понтрягина, динамическое программирование Беллмана и др.). Рекомендуется оптимальное управление по принципу самоорганизации с оптимизацией прогноза.

Система из шестнадцати уравнений, выделенных выше для управления экономикой Англии, содержит девятнадцать переменных. Значения трех аргументов μ_1 , μ_2 и μ_3 назначаются на каждый последующий год. При этом появляется возможность влиять на ход процессов в том или другом направлении.

В качестве обобщенного показателя состояния экономики можно использовать, например, степень загрузки промышленности

$$\Phi_3 = \left(1 - \frac{W + \Pi}{1/3K}\right) \rightarrow \min.$$

Чем ближе $\left(\frac{W + \Pi}{1/3K}\right)$ к единице, тем лучше состояние экономики. Возможно использование и других показателей оптимума экономической ситуации, например, индекс платежного баланса, темп экономического роста, уровень занятости, балансе государственных расходов и доходов и др.

Выбор показателя качества не является нашей задачей. Алгоритм, излагаемый ниже, применим при любом заданном показателе качества.

Синтез управления с оптимизацией прогноза можно выполнить по методу усеченного или полного перебора вершин куба управления [33] только при соблюдении ряда условий, в частности, при числе регулирующих воздействий не более трех - четырех. В частном случае, когда уравнения объекта являются линейными, решение задачи синтеза упрощается. При этом значения всех выходных величин объекта на текущем такте управления можно выразить явно через N , будущих значений всех управляющих воздействий и подставить их в критерий оптимальности $\Phi = I^*$. Тогда получим упрощенную задачу нелинейного программирования с малым числом ограничений. Задача синтеза еще более упрощается, если критерий оптимальности также линейный. При этом можно использовать так называемый *упрощенный принцип максимума для статических систем (конечномерных оптимизируемых функций)*, который является более простым по объему вычислений, чем известный полный принцип максимума для динамических систем. В случае статических систем, например, не требуется использование сопряженных дифференциальных или конечно-разностных уравнений. Рассматриваемые статические зависимости представляют собой алгебраические уравнения, получаемые для ряда конкретных тактов времени из конечно-разностных уравнений объекта.

Рассмотрим упрощенный принцип максимума для статических объектов управления. Пусть задана некоторая линейная функция от m переменных

$$I = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + I_0,$$

где I_0 — постоянная составляющая.

На управления наложены ограничения:

$$|u_i| \leq u_i^{\text{ext}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Максимум указанной функции достигается при

$$u_i = u_i^{\text{ext}} \text{ sign } \alpha_i,$$

в чем и заключается принцип максимума.

Другими словами, если заданное регулирующее воздействие увеличивает показатель качества, то его нужно взять возможно большим, а если уменьшает, — возможно меньшим. При $\alpha_i = 0$ можно взять любую величину u_i (регулирующее воздействие не

* Здесь буква I уже имеет другое значение, чем в модели П. Паркса и Ф. Пикатта.

регулирует). Ниже примем, что в этом случае $u_i = 0$, что соответствует минимуму энергии управления.

При использовании упрощенного принципа максимума для статических объектов исходный динамический объект, описываемый линейными конечно-разностными уравнениями, преобразуется в эквивалентный статический объект, размерность которого в N_y раз больше размерности исходного динамического объекта. Это значит, что значения каждой из входных и выходных величин объекта в любой будущий такт времени рассматриваются как независимые переменные. Например, вместо одного управления, действительного для любого номера такта времени k , записываются четыре уравнения для первого, второго, третьего и четвертого тактов отдельно. Динамические свойства объекта на время, равное времени упреждения, предполагаются неизменными.

Такой подход позволяет существенно упростить расчет оптимального управления, обойтись без трудоемких вычислительных поисковых процедур типа динамического программирования или градиентных процедур.

Формулировка задачи. Пусть уравнением объекта, полученным на ЭВМ по экспериментальным данным методами МГУА, будет

$$\frac{\Delta \bar{x}_{k+\gamma}}{\Delta t} = \sum_{v=0}^x \tilde{A}^v \bar{x}_{k+\gamma-v-1} + \sum_{v=0}^{N_\mu+1} \tilde{B}^v \bar{\mu}_{k+\gamma-v} + \bar{\lambda}_{k+\gamma}^0, \quad \gamma = 1, N_y,$$

где $\bar{x}$ — n -мерный вектор выходных величин; $\bar{\mu}$ — r -мерный вектор управления; $\bar{\lambda}_0$ — n -мерный вектор возмущающих воздействий; $\tilde{A}^v$, $\tilde{B}^v$ — матрицы параметров объекта размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно; Δt — величина шага дискретизации (такт управления); k — номер текущего такта; γ — номер произвольного будущего такта; N_y — максимальное число рассматриваемых тактов (время упреждения); N_x , N_μ — максимальные запаздывания для выходных величин и управлений соответственно.

Задан критерий качества управления, линейно зависящий от выходных величин объекта на последнем такте:

$$I = f(c, x_{k+N_y}),$$

где $\bar{c}$ — n -мерный вектор весовых коэффициентов.

Заданы также ограничения на величины управляющих воздействий:

$$|\mu_{l,k+\gamma}| \leq \mu_l^{\text{ext}}, \quad l = \overline{1, r}$$

либо на их приращения:

$$|\Delta \mu_{l,k+\gamma}| \leq \Delta \mu_l^{\text{ext}}, \quad l = \overline{1, r}.$$

Требуется определить такое управление объектом, чтобы с учетом заданных ограничений можно было достичь экстремума функции I .

Процедура синтеза. Выразим вектор выходных величин на каждом будущем такте как явную функцию только будущих значений управления. Для этого запишем уравнение объекта в виде

$$\bar{x}_{k+\gamma} = \sum_{v=0}^{N_x} A^v \bar{x}_{k+\gamma-v-1} + \sum_{v=0}^{N_\mu+1} B^v \bar{\mu}_{k+\gamma-v} + \bar{\lambda}_{k+\gamma}, \quad \gamma = \overline{1, N_y},$$

где $A^0 = E + \Delta t A^0$; $A^v = \Delta t \tilde{A}^v$, $v = \overline{1, N_x}$; $B^v = \Delta t \tilde{B}^v$, $v = \overline{1, N_\mu+1}$; $\bar{\lambda}_{k+\gamma} = \Delta t \bar{\lambda}_{k+\gamma}^0$.

Подставив в правую часть преобразованного уравнения объекта значения вектора на $\gamma - 1$ предыдущих тактах, можно исключить все будущие значения выходных величин. Тогда получим:

$$\bar{x}_{k+\gamma} = \bar{v}_{k+\gamma} + \sum_{v=0}^{\gamma-1} B^{v0} \mu_{k+\gamma-v}, \quad \gamma = 1, N_y,$$

где

$$\bar{v}_{k+\gamma} = \sum_{v=0}^{\gamma-1} A^{v-1,0} \left[\sum_{\alpha=0}^{N_x-\gamma+v-1} A^{\alpha+\gamma-v-1} \bar{x}_{k-\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{N_\mu-\gamma+v-1} B^{\alpha+\gamma-v} \bar{\mu}_{k-\alpha} + \bar{\lambda}_{k+\gamma-v} \right] -$$

вектор, зависящий от текущих и прошлых значений выходных величин, управления и от будущих значений возмущения, предполагаемого измеряемым. Матрицы коэффициентов выражений $\bar{x}_{k+\gamma}$ и $\bar{v}_{k+\gamma}$ определяются с помощью рекуррентных формул: *

$$A^{v0} = \sum_{\beta=0}^v A^\beta A^{v-\beta-1,0}, \quad A^{-1,0} = E, \quad A^{0,0} = A^0;$$

$$B^{v0} = \sum_{\beta=0}^v A^\beta B^{v-\beta-1,0}, \quad B^{-1,0} = E, \quad B^{0,0} = B^0.$$

Отсюда находим вектор выходных величин на последнем такте

$$\bar{x}_{k+N_y} = \bar{v}_{k+N_y} + \sum_{v=0}^{N_y-1} B^{v0} \mu_{k+N_y-v}$$

как функцию N_y будущих векторов управления. Подставив это выражение в критерий оптимальности, получим

$$I = (\bar{c}, \bar{v}_{k+N_y}) + \sum_{v=0}^{N_y-1} (B^{v0T} \bar{c}, \bar{\mu}_{k+N_y-v}).$$

* Использование рекуррентных формул для синтеза управления с оптимизацией прогноза предложено канд. техн. наук Л. М. Бойчуком.

Максимум критерия достигается при

$$\bar{\mu}_{k+N_y-v} = \bar{\mu}^{\text{ext}} \text{sign}(B^{v0T} \bar{c}), \quad v = \overline{0, N_y - 1}.$$

При управлении на скользящем интервале (с оптимизацией прогноза) на каждом такте расчет управления необходимо повторять. Если параметры объекта постоянны, то управление также будет постоянным, независимо от номера такта:

$$\bar{\mu}_{k+1} = \bar{\mu}^{\text{ext}} \text{sign}(B^{N_y-1,0T} \bar{c}) = \text{const}, \quad \bar{\mu}_{k+1} = \text{const}.$$

Учет ограничений на приращения управляющих воздействий. Приращения будем рассматривать как новые управления:

$$\bar{\mu}_{k+\gamma} - \bar{\mu}_{k+\gamma-1} = \bar{u}_{k+\gamma}, \quad \gamma = \overline{1, N_y}.$$

Совокупность этих выражений, а также уравнений объекта можно представить как матричные выражения:

$$M_{\bar{\mu}} = \bar{u} + \bar{m};$$

$$\bar{x} = A_{\bar{v}} + B_{\bar{\mu}},$$

где

$$\bar{x}^T = [\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_{k+N_y}];$$

$$\bar{v}^T = [\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_{k+N_y}];$$

$$\bar{\mu}^T = [\bar{\mu}_{k+1}, \dots, \bar{\mu}_{k+N_y}];$$

$$\bar{u}^T = [\bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_{k+N_y}];$$

$$\bar{m}^T = [\bar{\mu}_{k,0}, \dots, 0] -$$

составные векторы размерности N_y .

Выражения

$$A = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A^0 & E & 0 & \dots & 0 \\ A^{10} & A^0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_y-2,0} & A^{N_y-3,0} & A^{N_y-4,0} & \dots & E \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} B^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B^{10} & B^0 & 0 & \dots & 0 \\ B^{20} & B^{10} & B^0 & \dots & 0 \\ B^{N_y-1,0} & B^{N_y-2,0} & B^{N_y-3,0} & \dots & B^0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -E & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -E & E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -E & E \end{bmatrix} -$$

клеточные матрицы также размерности N_y .

Из этих уравнений следует:

$$\bar{x} = \hat{B}\bar{u} + \hat{f},$$

где

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{B}^{10} & B^0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{B}^{20} & \hat{B}^{10} & B^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{B}^{N_y-1,0} & \hat{B}^{N_y-2,0} & \hat{B}^{N_y-3,0} & \dots & B^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{f} = \hat{B}\bar{m} + A\bar{v},$$

причем

$$\hat{B}^{v0} = \sum_{l=0}^v B^{l0}.$$

Теперь ограничения наложены только на модули управляющих воздействий, т. е. задача сведена к рассмотренной выше.

Пример 20. Синтез управления для двухмерной линейной системы *. Пусть объект управления с двумя выходными величинами и двумя управляющими воздействиями описывается следующей системой дифференциальных уравнений регрессии, полученных по экспериментальным данным методами МГУА (дифференциально-разностная форма записи):

$$\frac{\Delta \bar{x}_{k+1}}{\Delta t} = \tilde{A}^0 \bar{x}_k + \tilde{A}^{-1} \bar{x}_{k-1} + \tilde{B}^0 \bar{\mu}_{k+1} + \tilde{B}' \mu_k,$$

где k — текущий такт управления;

$$\bar{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_{k-1} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} \\ x_{2,k-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mu}_k = \begin{bmatrix} \mu_{1,k} \\ \mu_{2,k} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mu}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mu_{1,k+1} \\ \mu_{2,k+1} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Начальные и предначальные условия:

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mu}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

* Пример написан совместно с канд. техн. наук Л. М. Бойчуком.

На приращения управляющих воздействий заданы ограничения (для любого значения k):

$$0 \leq |\mu_{1,k+l} - \mu_{1,k+l-1}| \leq 0,2;$$

$$0 \leq |\mu_{2,k+l} - \mu_{2,k+l-1}| \leq 0,2,$$

где $l = 1; 2; 3$ — номер будущего такта управления.

Критерий оптимальности рассматриваем при $l = 3$:

$$I = 3x_{1,k+3} + x_{2,k+3} \rightarrow \max.$$

Учитывая, что $\Delta \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$, и принимая $\Delta t = 1$, получаем матричное уравнение относительно выходных величин для $l = 1$:

$$\bar{x}_{k+1} = A^0 \bar{x}_k + A' \bar{x}_{k-1} + B^0 \bar{\mu}_{k+1} + B' \bar{\mu}_k,$$

где

$$A^0 = E + A^0 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad A' = \tilde{A}'; \quad B^0 = \tilde{B}^0; \quad B' = \tilde{B}',$$

причем

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично получаем уравнения на два и три такта вперед ($l = 2, 3$):

$$\bar{x}_{k+2} = A^0 \bar{x}_{k+1} + A' \bar{x}_k B^0 \mu_{k+2} + B' \bar{\mu}_{k+1};$$

$$\bar{x}_{k+3} = A^0 \bar{x}_{k+2} + A' \bar{x}_{k+1} + B^0 \bar{\mu}_{k+3} + B' \bar{\mu}_{k+2}.$$

Требуется определить совокупность управлений на трех будущих тактах

$$\bar{\mu}_{k+1}, \bar{\mu}_{k+2}, \bar{\mu}_{k+3}$$

при соблюдении ограничений на приращения управляющих воздействий. Время упреждения скользящего интервала прогноза — три такта ($T_y = 3$). В конце этого интервала критерий оптимальности стремится достигнуть максимума.

Если в соотношение для $\bar{x}_{k+3}$ подставить выражение для $\bar{x}_{k+1}$ и $\bar{x}_{k+2}$, получим явную зависимость вектора выходных величин на третьем такте от искоемых управляющих воздействий:

$$\bar{x}_{k+3} = (A^0 A^{10} + A' A^0) \bar{x}_k + (A^0 A^0 A' + A' A') \bar{x}_{k-1} + (A^0 A^0 B' + A' B') \bar{\mu}_k + (A^0 B^{10} + A' B^0) \bar{\mu}_{k+1} + B^{10} \bar{\mu}_{k+2} + B^0 \bar{\mu}_{k+3},$$

где $A^{10} = A^0 A^0 + A'$; $B^{10} = A^0 B^0 + B'$.

Выразим управляющие воздействия через их приращения и введем обозначения:

$$\bar{\mu}_{k+1} - \bar{\mu}_k = \Delta \bar{\mu}_{k+1} = \bar{u}_{k+1};$$

$$\bar{\mu}_{k+2} - \bar{\mu}_{k+1} = \Delta \bar{\mu}_{k+2} = \bar{u}_{k+2};$$

$$\bar{\mu}_{k+3} - \bar{\mu}_{k+2} = \Delta \bar{\mu}_{k+3} = \bar{u}_{k+3}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение для будущих значений выходных величин получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+3} = & (A^0 A^{10} + A' A^0) \bar{x}_k + (A^0 A' A' + A' A') \bar{x}_{k-1} + (A^0 A^0 B' + A' B' + A' B^{10} + A' B^0 + B^{10} + B^0) \bar{\mu}_k + \\ & (A^0 B^{10} + A' B^0 + B^{10} + B^0) \bar{\mu}_{k+1} + (B^{10} + B^0) \bar{\mu}_{k+2} + B^0 \bar{\mu}_{k+3}. \end{aligned}$$

Далее критерий оптимальности можно в общем случае представить как скалярное произведение вида:

$$I_k = (\bar{c}, \bar{x}_{k+3}),$$

где для рассматриваемого примера вектор весовых коэффициентов $\bar{c}^T = [3, 1]$. Если в это выражение подставить вектор $\bar{x}_{k+3}$, получим

$$I = (\hat{B}^{1T} \bar{c}, \bar{u}_{k+1}) + (\hat{B}^{2T} \bar{c}, \bar{u}_{k+2}) + (\hat{B}^{3T} \bar{c}, \bar{u}_{k+3}) + I_0,$$

где I_0 — составляющая, не зависящая от приращений управляющих воздействий при $l = 1, 2, 3$;

$$\hat{B}^1 = A_0 B^{10} + A_1 B^0 + B^{10} + B^0 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\hat{B}^2 = B^{10} + B^0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \hat{B}^3 = B^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Максимум полученного критерия оптимальности при ограничениях вида

$$|u_{l,k+1}| \leq 0,2;$$

$$|u_{l,k+2}| \leq 0,2;$$

$$|u_{l,k+3}| \leq 0,2 \quad (l = 1, 2)$$

определяется выражениями:

$$\bar{u}_{k+1}^0 = 0,2 \operatorname{sign} \hat{B}^{1T} \bar{c} = 0,2 \operatorname{sign} \begin{vmatrix} 24 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +0,2 \\ -0,2 \end{vmatrix};$$

$$\bar{u}_{k+2}^0 = 0,2 \operatorname{sign} \hat{B}^{2T} \bar{c} = 0,2 \operatorname{sign} \begin{vmatrix} 9 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +0,2 \\ -0,2 \end{vmatrix};$$

$$\bar{u}_{k+3}^0 = 0,2 \operatorname{sign} \hat{B}^{3T} \bar{c} = 0,2 \operatorname{sign} \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +0,2 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

С учетом начальных значений оптимальные управляющие воздействия (при выборе скользящего интервала длиной три такта)

$$\bar{\mu}_{k+1}^0 = \begin{vmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{vmatrix}, \quad \bar{\mu}_{k+2}^0 = \begin{vmatrix} 1,4 \\ 1,0 \end{vmatrix}, \quad \bar{\mu}_{k+3}^0 = \begin{vmatrix} 1,6 \\ 1,0 \end{vmatrix}.$$

При использовании принципа управления с оптимизацией прогноза реальные управляющие воздействия следует взять равными значениям на первом такте,

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_{k+1}^0 = \begin{vmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{vmatrix},$$

и затем на каждом последующем такте повторять всю приведенную выше процедуру оптимизации. Однако, если параметры объекта постоянны, а уравнения его линейны, такое управление также сохраняется постоянным на всех последующих тактах. При этом соответствующее изменение выходных величин объекта:

$$\bar{x}_{k+1} = \begin{vmatrix} 3,2 \\ 1,0 \end{vmatrix}; \quad \bar{x}_{k+2} = \begin{vmatrix} 7,6 \\ 0,8 \end{vmatrix}; \quad \bar{x}_{k+3} = \begin{vmatrix} 18,8 \\ 0,6 \end{vmatrix};$$

$$\bar{x}_{k+4} = \begin{vmatrix} 45,8 \\ 0,6 \end{vmatrix}; \quad \bar{x}_{k+5} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0,8 \end{vmatrix} \dots$$

В данном примере критерий оптимальности растет только до четвертого такта, а затем начинает уменьшаться.

Пример 21. Синтез управления экономической системой Англии (в конце 1965 г) *. Уравнения управления экономической системой Англии, селектированные

* Пример написан совместно с канд. техн. наук Л. М. Бойчуком и инж. Б. К. Светальским.

259

[illegible][illegible]

Таблица 43

Матрица B^3

[illegible]

Таблица 44
Матрица $\tilde{B}^4$

[illegible]

Таблица 45
Матрица $\bar{\lambda}_{R+1}$

—0,102
—1967, 1—123, 44 T
654,62
557,62
—2044,70
—1462,8—223,5 T
—635,85
—9,62
—39,32+3,08 T
945,92
197,82
2693,8
7852,5
—1794,30
—962,33
42,93

Таблица 46
Матрица B^{10}

[illegible]

Таблица 47
Матрица B^{20}

[illegible]

Таблица 48
Матрица B^{30}

$-0,250 \times 10^{-4}$	$0,350 \times 10^{-4}$	
-0,684	-0,413	0,520
-1,382	-2,345	
1,061	0,802	
2,700	1,785	
-0,200	-0,476	
0,983	0,198	
0,395	1,120	
	-0,004	
-0,192	-0,073	0,258
0,037		

Актуальность разработки объективных методов моделирования сложных систем.

В области футурологии сейчас идет спор. Так называемые «оптимисты» (к ним принадлежит, например, Герман Кан и Этони Винер из Гудзонского Института, США) утверждают, что ресурсы Земли позволяют увеличить население планеты в десять раз при уровне жизни, приблизительно равном современному уровню в США [46].

«Пессимисты» утверждают, что ресурсы Земли (если не будут предприняты специальные меры) будут исчерпаны в ближайшие 100—200 лет. Такие выводы получили, например, Дж. Форрестер (США) [80] и Д. Медоуз (Англия).

Согласно этим прогнозам, угля на Земле хватило бы на много лет, если бы его потребление не увеличивалось по экспоненциальному закону. Сейчас наблюдается неравномерность: технически развитые страны потребляют угля значительно больше, чем остальные. Если, например, уровень потребления повсюду приблизится к современному для передовых стран, то уголь вскоре будет исчерпан. Если бы все жители планеты вдруг начали потреблять столько, сколько потребляют в среднем жители промышленных стран, то ресурсов Земли хватило бы приблизительно на десять лет.

Серебро и свинец в основном будут исчерпаны через сорок—шестьдесят лет [46]. Вилка прогнозов значительная.

Почему так различны выводы? Ведь те и другие прогнозы получены на вычислительных машинах! Машина действует объективно, но человек при составлении детерминированной модели вынужден указать машине уравнения элементов системы. Разные исходные предположения дают разные результаты.

Совсем другое положение складывается при использовании алгоритмов самоорганизации: здесь машине задаются только объективные результаты наблюдений. Так как уравнения модели машина синтезирует сама по алгоритмам МГУА, обеспечивается объективный характер прогнозов. Прогнозы могут быть получены для оптимального (по заданному критерию) управления, лучше всего — для так называемого управления с оптимизацией прогнозов. То обстоятельство, что человек не должен указывать априори (изобретать) зависимостей между переменными при программировании вычислительных машин, придает моделям по алгоритмам самоорганизации объективный характер. Объективные зависимости находит сама машина, пользуясь наибольшим числом экспериментальных точек.

Для того чтобы разобраться в массе процессов, происходящих в окружающем нас мире, требуется срочная разработка наиболее

объективных методов долгосрочного прогноза, т. е. методов, основанных на принципе самоорганизации.

Как долго будет продолжаться рост потребления сырья и загрязнения биосферы по экспонентам? Действительно ли наблюдаемый участок процесса великой игры «человек — природа» относится к экспоненте, или может быть тут действует другой закон?

Какой запас естественных ресурсов останется у нас через сто лет? Каково будет загрязнение среды в 2020 году? Как будет расти производительность труда в ближайшие десятилетия? Подобные вопросы могут и должны получить объективный ответ, основанный на прямом анализе экспериментальных данных вычислительной машиной, без участия человека.

Методы самоорганизации коренным образом отличаются от известных приемов экстраполяции. При самоорганизации алгоритм (в случае глубокого минимума критерия селекции) позволяет открыть закон, действующий в данной сложной системе по малой выборке самых последних экспериментальных или натурных данных. Закон находится либо в виде алгебраических уравнений (трендов), либо в виде дифференциальных уравнений регрессии. В том и другом случае можно получить долгосрочный прогноз. Учет времени среди аргументов позволяет получить прогнозы даже для изменяющихся во времени нестационарных объектов. Метод перебора моделей действителен для любых объектов. С каждой новой точкой модель уточняется (адаптация модели),

Что касается совершенно непредвиденных событий (например, космических *катастроф*, падений крупных метеоритов и пр.), то информации о них в экспериментальных точках нет. Однако это не означает, что возможность таких событий лишает человека способности открывать законы, действующие в системе, по экспериментальным данным.

Футурология может и должна стать объективной: поскольку уравнения прогнозирования машина выводит по согласованным исходным данным, действительно наблюдавшимся в системе, то не может быть ни «оптимистического», ни «пессимистического» прогнозов. Должен быть один, объективный, прогноз.

Основная идея метода динамического моделирования. В последние годы для моделирования сложных систем все чаще применяется детерминистический, субъективный метод, основанный на выводе уравнений элементов системы человеком, который был назван динамическим моделированием одним из основных его авторов Дж. Форрестером [73, 82].

Сравнивая работы Дж. Форрестера с другими работами того же направления, можно сказать, что многие другие авторы разрабатывали и применяли аналогичные субъективные методы, называя их по-другому (работы Н. М. Амосова по методу «эвристического

моделирования» [2], А. М. Ляпунова, В. В. Меншуткина, А. А. Уманова по «имитационным экологическим моделям» [54, 55] и др.). Модели по методу динамического моделирования часто называют имитационными или портретными. Ниже будем пользоваться термином «динамическое моделирование».

Поясним сущность идеи динамического моделирования на примере. Каждый специалист-психолог имеет некоторые представления о связи переменных, характеризующих психическое состояние личности или коллектива людей. Такие представления образуют то, что называется опытом специалиста. Допустим, специалист уверен, будто «страх» повышает «агрессивность», «усталость», снижает «внимание» и т. п. Если это так, то почему не изобразить эти зависимости при помощи простых графиков, уравнений или вычислительных алгоритмов (подпрограмм) и не ввести их в общую программу вычислительной машины для того, чтобы посмотреть, как ведет себя вся система таких зависимостей и подпрограмм в целом? В состав априорной информации входят только характеристики и подпрограммы элементов системы, которые приходится изобретать на основании общего опыта работы с людьми. Машина же покажет суммарный эффект действия всех элементов в системе, которая и является моделью искусственного разума. К тому же для такого моделирования разума не требуется никаких конкретных экспериментальных данных. Характеристики подпрограммы элементов системы изобретаются человеком — автором модели — и составляют существенную часть априорной информации, вводимой в машину. Переменные в указанных характеристиках («страх», «внимание», «усталость» и др.) весьма условны. Авторы часто не могут дать точное определение терминов переменных и тем более измерить их практически на человеке. Однако, как отмечалось, конкретных измерений и не требуется. Нужно только знать, что понимается под этими условными названиями, даже если это понимание «размытое», «небулярное», «диффузное».

Основная цель метода динамического моделирования — проследить влияние изменений в априорных предпосылках, т. е. в уравнениях элементов системы, на общий ход процессов в изучаемом объекте и получить качественную общую картину процессов во всей системе. Главное достоинство динамического моделирования состоит в том, что оно позволяет выяснить поведение системы в целом, делая различные предположения о характеристиках ее элементов. Модели, получаемые по принципу самоорганизации, дают количественные результаты.

Динамические модели развития Мира. В книге [80], написанной американским ученым Дж. Форрестером, рассмотрено исследование упрощенной модели динамики Мира (до 2100 г.). Схематизм модели определяется использованием ограниченного числа перемен-

ных, усредненных для многих стран мира. Что касается использования статистических данных, то автор считает его ненужным. Статистические данные используются только для масштабирования кривых в одной точке, соответствующей данным 1970 г. В остальных точках кривые изображены соответственно априорным предположениям автора, например такими: смертность увеличивается в два раза, если загрязнение среды возрастет в двадцать раз и т. п. Предположения такого рода представлены в виде системы из двадцати нелинейных уравнений (существенно упрощенных Д. Куиперсом [791]).

Ниже приводятся нелинейные уравнения с учетом упрощений Д. Куиперса:

Обозначения

P — население Земли (P_0 — то же в 1970 г.); C — капиталовложения; V — загрязнение среды (V_0 — в 1970 г.); N — природные ресурсы (N_0 — в пять раз увеличенное значение ресурсов, разведанных в 1970 г.); α — часть капиталовложений, идущих в сельское хозяйство; F — пища; M — материальный уровень жизни.

Уравнения динамики мирового развития (по Форрестеру—Куиперсу)*

Население:

$$\frac{dP}{dt} = P \left[0,41 F_{17}(F) F_3(M) F_{18} \left(\frac{P}{P_0} \right) F_{18} \left(\frac{V}{V_0} \right) - 0,028 F_{11}(M) \times \right. \\ \left. \times F_{12} \left(\frac{V}{V_0} \right) F_{13}(F) F_{14} \left(\frac{P}{P_0} \right) \right],$$

где $P_0 = 3,6 \cdot 10^9$; $V_0 = 3,6 \cdot 10^9$.

Капиталовложения:

$$\frac{dC}{dt} = 0,05 P F_{26}(M) - 0,025 C.$$

Загрязнение среды:

$$\frac{dV}{dt} = P F_{32} \left(\frac{C}{P} \right) - \frac{V}{F_{34} \left(\frac{V}{V_0} \right)}.$$

Природные ресурсы:

$$\frac{dN}{dt} = - P F_{42}(M).$$

Капиталовложения в сельское хозяйство:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left\{ F_{38}(F) F_{43} \left[\frac{F_{38}(M)}{F_{10}(F)} \right] - \alpha \right\} : \alpha_T,$$

* Обратим внимание на то, что запаздывающие аргументы не учитываются, все переменные измеряются в один и тот же момент времени.

где

$$\alpha_T = 15.$$

Материальный уровень жизни:

$$M = \frac{C}{P} F_6 \left(\frac{N}{N_0} \right) \frac{(1-\alpha)}{1-\alpha_N}, \text{ где } \alpha_N = 0,3; \quad N_0 = 900 \cdot 10^9.$$

Пища:

$$F = F_{21} \left(\frac{C}{P} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) F_{20} \left(\frac{P}{P_0} \right) F_{28} \left(\frac{V}{V_0} \right).$$

Нелинейные функции (20 исходных предположений автора модели):

$$F_3 = 0,15M + 1,15;$$

$$F_{11} = \begin{cases} -1,6M + 2,6 & (\text{при } M < 1); \\ -0,4M + 1,4 & (\text{при } M > 1); \end{cases}$$

$$F_{26} = 0,85M + 0,15;$$

$$F_{38} = 0,75M + 0,25;$$

$$F_{42} = 0,9M + 0,1;$$

$$F_{12} = 0,038 \frac{V}{V_0} + 0,92;$$

$$F_{18} = -0,012 \frac{V}{V_0} + 1,02;$$

$$F_{28} = -0,012 \frac{V}{V_0} + 1,02;$$

$$F_{34} = 0,19 \frac{V}{V_0} + 0,6;$$

$$F_{13} = -1,4F + 2,4;$$

$$F_{17} = \begin{cases} F & (\text{при } F < 1); \\ 0,6F + 0,4 & (\text{при } F > 1); \end{cases}$$

$$F_{36} = \begin{cases} -0,6F + 0,9 & (\text{при } F < 1); \\ -0,3F + 0,6 & (\text{при } F > 1); \end{cases}$$

$$F_{40} = 0,9F + 0,1;$$

$$F_{14} = 0,2 \frac{P}{P_0} + 0,8;$$

$$F_{16} = -0,1 \frac{P}{P_0} + 1,1;$$

$$F_{20} = -0,4 \frac{P}{P_0} + 1,4;$$

$$F_{32} = \begin{cases} 2 \frac{C}{P} - 1 & (\text{при } \frac{C}{P} > 1); \\ 0,93 \frac{C}{P} + 0,05 & (\text{при } \frac{C}{P} < 1); \end{cases}$$

$$F_{21} = 0,4 \frac{C}{P} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_{0N}} + 0,6;$$

$$F_6 = \begin{cases} 0,6 \frac{N}{N_0} + 0,6 & (\text{при } \frac{N}{N_0} > \frac{3}{4}); \\ 1,4 \frac{N}{N_0} - 0,2 & (\text{при } \frac{N}{N_0} < \frac{3}{4}); \end{cases}$$

$$F_{18} = \begin{cases} 0,4 \frac{F_{38}(M)}{F_{40}(P)} + 0,6 & (\text{при } F_{38}(M) < F_{40}(P)); \\ \frac{F_{38}(M)}{F_{40}(P)} & (\text{при } F_{38}(M) > F_{40}(P)). \end{cases}$$

Пределы изменения величин (для масштабирования модели):

$$0 < M < 2; \quad 1 < \frac{C}{P} \cdot \frac{\alpha}{\alpha_{0N}} < 2;$$

$$0 < \frac{V}{V_0} < 10; \quad \frac{1}{4} < \frac{N}{N_0} < 1;$$

$$0,75 < F < 1,25;$$

$$1 < \frac{P}{P_0} < 2; \quad 0,5 < \frac{F_{40}}{F_{38}} < 1,5.$$

$$1 < \frac{C}{P} < 2;$$

Уравнения интегрировались при разных предположениях об управлении, т. е. сознательном вмешательстве человека в ход мирового динамического процесса. На рис. 51 пунктирной кривой показаны решения, отвечающие условию «все будет идти так, как идет сейчас, никаких специальных мер приниматься не будет». При других предположениях о различных способах вмешательства человека с целью изменить ход процесса получены следующие выводы [80]: 1) если Мир не изменится, то «качество жизни» I в самом ближайшем будущем начнет снижаться; 2) повышение эффективности технологии с целью уменьшения потребления природных ресурсов не улучшит положения; 3) увеличение капиталовложений в промышленность C даст только кратковременное повышение жизненного уровня, но ускорит рост загрязнения среды; 4) увеличение капиталовложений при одновременном снижении прироста населения P привело бы к резкому повышению «качества жизни», но только на несколько ближайших десятилетий; 5) уменьшение потребления природных ресурсов (за счет лучшей технологии) при увеличении капиталов-

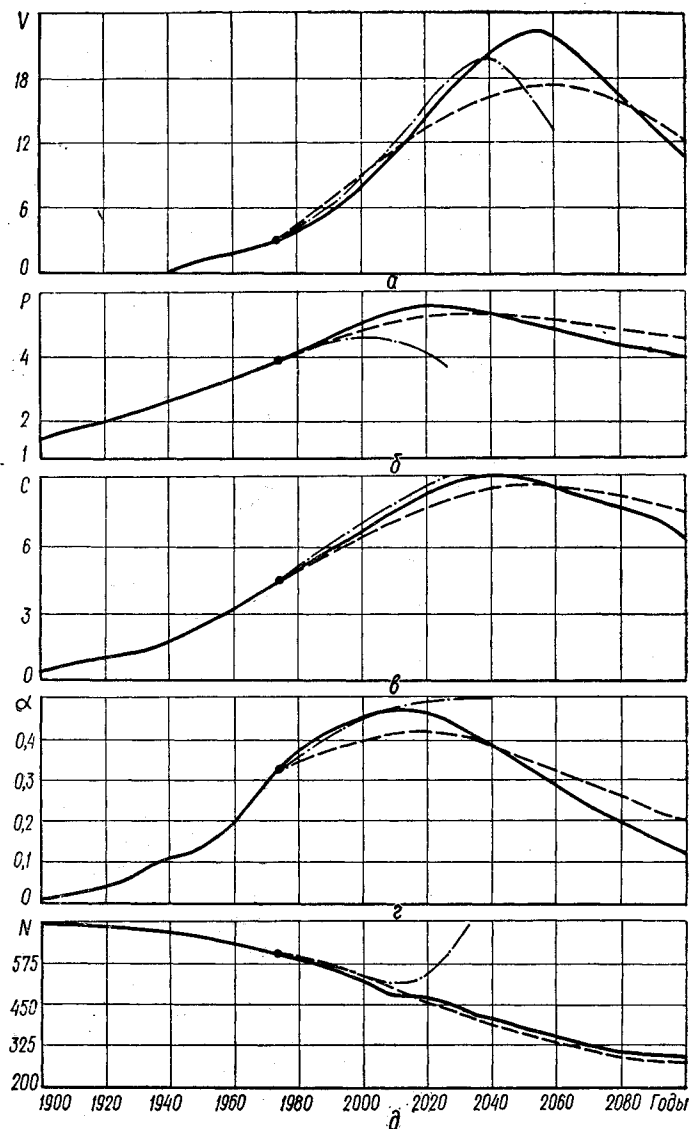


Рис. 51. Сравнение решений уравнений Форрестера (—) и уравнений, полученных по МГУА при использовании данных до 1975 г. включительно: (---) — без этапа адаптации коэффициентов; (- - -) — с адаптацией коэффициентов по критерию несмещенности до $k = (n_{см}/n_{см. нач})^2 + (B/B_{нач})^2 = 0$.

вложений не приводит к повышению жизненного уровня; б) если к условиям п.5 добавить снижение загрязнения среды, то положение существенно улучшится; 7) некоторое стабильное положение при высоком уровне жизни может быть достигнуто, если уменьшить капиталовложения C , сократить рождаемость, уменьшить потребление природных ресурсов.

Критика метода динамического моделирования. Подход и исходные предположения Дж. Форрестера подвергались серьезной критике как со стороны советских ученых [46], так и со стороны многих ученых на Западе. Например, в работе [83] сделаны следующие замечания:

В модели Дж. Форрестера предполагается рост населения, производства и других переменных по экспонентам, Результаты моделирования и, в частности, точки кризисов (пересечения экспонент) очень неустойчивы и чувствительны к выбору показателей экспонент. Небольшие изменения в исходных характеристиках приводят к большим изменениям результатов моделирования.

Не учитываются действующие в обществе механизмы обратных связей, такие как механизмы цен. Например, как только цена чистой пресной воды увеличится, будет действовать переток капиталовложений в установки, сохраняющие чистую воду и т. д.

Существует некоторый механизм, уменьшающий рождаемость в стране при увеличении продолжительности жизни людей. Этот механизм в предположениях Дж. Форрестера также не учтен.

В работе [78] указывается на большую зависимость результатов моделирования от малых изменений исходных предположений: даже малые изменения в уравнениях элементов системы приводят к значительным изменениям в результатах моделирования.

По мнению советских ученых [46], основное свойство метода динамического моделирования (которое можно рассматривать как недостаток с точки зрения поставленной цели) — субъективность метода. Другое свойство состоит в том, что метод динамического моделирования не исправляет ошибок автора модели, если он допускает такие ошибки. Метод не пригоден для открытия действительной структуры объекта, Иммитационные модели одного ученого, построенные на одних представлениях о процессе, часто оказываются такими же точными, как и модели другого ученого, построенные на несколько отличных представлениях о законах элементов системы. Метод приводит к «множественности моделей», отражающей множественность представлений о сути процесса.

Кроме того, модели, получаемые по методу динамического моделирования, не могут быть очень точными, так как все переменные обязательно измеряются в один и тот же момент времени (такое свойство уравнений, изобретаемых человеком) и не содержат функций времени. Следовательно, модель Форрестера не может

быть очень точной хотя бы потому, что в уравнениях нет временных и запаздывающих аргументов: процессы считаются марковскими, что не соответствует действительности.

Прямое моделирование системы методами самоорганизации. Согласно работе [81], до тех пор, пока ученые не перейдут к объективным методам теории самоорганизации, которые не требуют много априорной информации, они будут «говорить разными голосами», и, следовательно, никто не будет серьезно слушать их. Принцип самоорганизации является основой для прямого объективного моделирования — единого голоса ученых в ближайшем будущем.

Главное открытие теории самоорганизации (весьма революционное по последствиям) состоит в установлении следующего свойства моделей: некоторые критерии, удовлетворяющие понятию «внешнего дополнения» теоремы Геделя, проходят через минимумы при постепенном повышении сложности модели. Это даст возможность использовать вычислительную машину для нахождения единственной модели оптимальной сложности, которая отвечает глобальному минимуму целесообразно выбранного критерия.

Пользуясь принципом самоорганизации моделей, можно найти модель динамики мира. Вычислительная машина, постепенно увеличивая сложность дифференциальных уравнений элементов системы, находит уравнения, отвечающие минимуму критерия селекции. Здесь можно применить два вида алгоритмов МГУА. При сравнительно небольшом числе аргументов (ориентировочно до десяти) для синтеза модели можно использовать комбинаторный алгоритм моделирования сложных объектов по трендам [44], а при большем числе аргументов — алгоритм системного дифференциального многократного прогноза [15, 65].

Краткое описание алгоритма МГУА, использованного для синтеза модели динамики Мира. Многорядный селекционный алгоритм [65] использует линейные частные описания вида $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$, благодаря чему единственное из уравнений, селективируемое на последнем ряду, также получается линейным.

Например, при трех аргументах x_1 , x_2 и x_3 уравнения по рядам селекции следующие:

1-й ряд

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad y_2 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_3, \quad y = a_0 + a_1x_2 + a_2x_3;$$

2-й ряд

$$z_1 = bx + b_1y_1 + b_2y_2, \quad z_2 = b_0 + b_1y_1 + b_2y_3, \quad z_3 = b_0 + b_1y_2 + b_2x_3;$$

3-й ряд

$$v = c_0 + c_1z_1 + c_2z_2, \quad v_3 = c_0 + c_1v_1 + c_2z_3; \quad v_4 = c_0 + c_1v_2 + c_2z_3$$

и т. д.

На последнем ряду выбирается единственное, лучшее по критерию селекции уравнение.

Коэффициенты линейных полиномов во всех рядах селекции определяются по методу наименьших квадратов дважды, на четных и нечетных точках. Это дает возможность определить показатель смещенности каждого уравнения:

$$n_{см} = \sum_1^N (y^* - y^{**})^2,$$

где N — число точек в таблице исходных данных; y^* — значение переменной, вычисленное по уравнению регрессии в случае, когда для оценки коэффициентов используются четные точки; y^{**} — решение того же уравнения в случае, когда для оценки коэффициентов используются нечетные точки.

При числе аргументов более трех количество уравнений по рядам селекции быстро нарастает. Поэтому приходится ограничить свободу принятия решений F (количество пропускаемых в последующий ряд уравнений). После получения оценки несмещенности коэффициенты наиболее несмещенных полиномов уточняются методом наименьших квадратов по данным всех заданных точек (этап адаптации коэффициентов).

Критерий несмещенности $n_{см} \rightarrow \min$ является в данном алгоритме вспомогательным и используется только для сокращения объема решения работ. По критерию несмещенности на каждом ряду селекции выбирается F самых несмещенных уравнений.

Основным критерием является критерий баланса переменных, вычисляемый на интервале экстраполяции (от $T = 0$ до $T = T_y$):

$$B = \sum_{k=0}^{k=T_y} b_k \rightarrow \min,$$

$$\text{где } b_k = I_k - (a_0 + a_y P_k + a_2 N_k + a_3 C_k + a_4 V_k + a_5 \alpha_k + a_6 T_k).$$

По этому критерию сравниваются между собой прогнозы, получаемые для заданного времени упреждения T_y при помощи интегрирования самых несмещенных уравнений (F для каждой переменной) во всех возможных комбинациях с тем, чтобы найти систему уравнений, дающую лучший баланс переменных. Величина F оптимизируется опробованием так, чтобы получить достаточную глубину минимума.

Оценка достоверности прогноза. Минимум критерия баланса зависит от времени упреждения прогноза. Обычно с увеличением упреждения глубина минимума уменьшается. Поэтому при оценке глубины минимума следует указать время упреждения, для которого этот минимум получен. Практически задачу можно считать

успешно решенной, если при времени упреждения не менее пяти интервалов получена невязка баланса менее 5%, т. е. $B_{\min} \leq 0,05$ при $T_y \geq 5$ интервалов.

Пример 22. Самоорганизация уравнений прогнозирования динамики Мира по данным до 1975 г. включительно. Для синтеза уравнений прогнозирования был применен описанный выше алгоритм [65]. В качестве переменных использованы все переменные модели Дж. Форрестера [80]: P — население Мира; N — естественные ресурсы; C — капиталовложения в промышленность; V — загрязнение биосферы; α — капиталовложения в сельское хозяйство. Вычислительная машина, используя данные за период с 1900 по 1975 гг. включительно, селектировала следующие уравнения прогнозирования (без ординат регулирующих воздействий с индексом +1):

$$\frac{\Delta I}{\Delta T} = -10,23 - 1,288I_0 + 0,0001873V_{-1} + 0,00001299N_{-2} - 0,00007638C_0 - 2,532\alpha_0 + 1,464\alpha_{-1} + 0,09257T;$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = 4624 + 0,06304V_0 + 0,07431P_0 - 0,005198N_{-2} + 0,1512C_0 - 0,2991C_{-2} + 1,661\alpha_{-2};$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = -8358 + 0,238V_0 - 0,04922P_0 - 0,2565P_{-1} - 0,04716N_0 + 0,01075N_{-1} + 0,04613N_{-2};$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta T} = 226\,469 + 0,5214P_{-1} - 0,2937N_{-1} - 8,333C_0 - 5,347C_{-1} + 744,1\alpha_{-1};$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} = 141,4 + 0,06375V_{-1} - 0,1442P_0 + 1,677C_0 - 1,713C_{-1};$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta T} = -9,216 + 0,0003468P_0 + 0,00000968N_0 - 0,001222C_{-1} + 0,001499C_{-2} - 0,2474\alpha_{-2}.$$

Индексы при переменных показывают время запаздывания: например, V_{-2} означает значение загрязнения, измеренное $2 \times 5 = 10$ лет назад и т. п. В качестве исходных данных использованы кривые из работы Дж. Форрестера [80] (табл. 52), следовательно, полученные уравнения отвечают всем его предположениям. Все, что можно получить по этим данным, — это некоторую аппроксимацию уравнений Форрестера. Чтобы получить объективные уравнения динамики Мира, необходимо располагать данными реальных статистических источников.

Аргументы в восстановленных уравнениях не всегда соответствуют аргументам уравнений, предлагаемых Форрестером. В некоторых уравнениях одни аргументы выброшены вычислительной машиной, другие введены. Модели сложных объектов не имеют незаменимых аргументов, так как все они взаимосвязаны. Максимальное время запаздывания аргументов было ограничено двумя тактами. Благодаря линейности уравнений динамики легко прогнозировать будущее и синтезировать оптимальное управление, пользуясь многими известными методами. Рассмотрим один из них.

Прогнозирование при отсутствии специального управления. Согласно методу системного многократного дифференциального прогноза уравнения регрессии,

полученные по МГУА, интегрируются одновременно, интервал за интервалом, в течение всего времени упреждения, требуемого для прогноза. Результаты интегрирования показаны на рис. 51, там же приведены решения уравнений Форрестера. Сравнивая кривые, можно заключить, что решения линейных уравнений синтезированных по МГУА, довольно хорошо совпадают с решениями нелинейных уравнений Форрестера. По-видимому, точность аппроксимации может быть повышена, если использовать МГУА для селекции нелинейных уравнений. Но для этого необходимо иметь реальные статистические данные.

Таблица 52

Исходные данные, полученные по кривым Дж. Форрестера

Год	Население P , чел. $\times 10^6$	Природные ресурсы N , усл. ед. $\times 10^6$	Капиталовложения C , доллары $\times 10^6$	Загрязнение среды V , усл. ед. $\times 10^6$	Капиталовложения в с.-х. α , доллары $\times 10^6$	Отсчет времени T , годы	Качество жизни, I
1900	1631,38	899776,00	409,40	51,30	0,198	1	0,78
1905	1585,95	897200,00	512,55	80,08	0,181	2	0,97
1910	1640,81	893952,00	635,62	116,95	0,168	3	1,08
1915	1748,98	886531,00	777,50	480,37	0,160	4	1,16
1920	1869,82	879936,00	957,97	812,08	0,160	5	1,20
1925	2003,49	872798,00	1167,07	1015,01	0,164	6	1,21
1930	2143,86	864594,00	1401,21	1291,28	0,172	7	1,21
1935	2291,57	855338,00	1655,61	1590,89	0,183	8	1,2
1940	2445,76	845012,00	1928,07	1951,50	0,195	9	1,17
1945	2605,28	833675,00	2216,98	2367,44	0,207	10	1,15
1950	2769,13	821348,00	2520,62	2836,38	0,220	11	1,12
1955	2935,66	808066,00	2837,24	3358,58	0,233	12	1,09
1960	3103,39	793860,00	3164,58	3927,29	0,246	13	1,06
1965	3270,63	778772,00	3500,14	4539,70	0,259	14	1,03
1970	3435,77	762852,00	3841,13	5189,57	0,272	15	1,00
1975	3597,23	746158,00	4184,55	5871,66	0,284	16	0,97

Пример 23. Самоорганизация модели и синтез управления с оптимизацией прогноза по методу полного перебора вершин гиперкуба возможных управлений*. Предположим, что управление развитием Мира начнется в 1980 г. и будет основано на использовании принципа управления с оптимизацией прогноза. В качестве критерия качества управления можно выбрать прогнозируемые значения переменной, которую Дж. Форрестер назвал «качество жизни» [80]. Используя данные, приведенные в табл. 52, можно вывести (при помощи алгоритма МГУА с линейными частными описаниями и с протекцией переменных) линейный функционал:

$$I_k = a_0 + a_1P_k + a_2N_k + a_3C_k + a_4V_k + a_5\alpha_k + a_6T_k,$$

где $k = 1, 2, \dots, 39$ (индексы интервалов); $a_0 = -12,3211$; $a_1 = -32,76174 \times 10^{-4}$; $a_2 = 18,29544 \cdot 10^{-6}$; $a_3 = 1,71031 \cdot 10^{-3}$; $a_4 = -0,0845637 \cdot 10^{-3}$; $a_5 = 5,52437$; $a_6 = 0,1943275$.

Это алгебраическое уравнение было принято в качестве уравнения баланса переменных. Модели выбирались так, чтобы полученное уравнение выполнялось не только во всех точках табл. 52, т. е. на интервале интерполяции, но и в будущем, на интервале экстраполяции при любом значении k . В этом и состоит требование баланса переменных.

* Пример написан совместно с инж. Б. К. Светальским.

Для самоорганизации уравнений управления прежде всего были распределены переменные: свободные переменные системы — координаты I , P и V (качество жизни, народонаселение и загрязнение биосферы); жестко заданное внешнее возмущение — координата N (ресурсы по данным Дж. Форрестера); регулирующие воздействия — координаты C и α (капиталовложения в промышленность и в сельское хозяйство).

Задача управления с оптимизацией прогноза состоит в том, чтобы изменять регулирующие воздействия в конце каждого такта времени (равного пяти годам) с целью максимизировать прогнозируемые значения «качества жизни» в конце двадцатипятилетнего скользящего интервала: (через пять тактов = 25 лет) $\Phi = I + 5 \rightarrow \max$, ($k = 5$). Выбор такого большого времени упреждения основан на так называемом асимптотическом законе. Этот закон устанавливает, что результат синтеза управления с оптимизацией прогноза не изменяется при увеличении времени упреждения, если последнее достаточно велико. При синтезе управления учитывались ограничения на возможные приращения регулирующих воздействий за один такт:

$$0 \leq \Delta C \leq 500; \quad 0 \leq \Delta \alpha \leq 0,05.$$

Глубина учитываемой предыстории была принята равной двум тактам. Таким образом, в задаче имелось всего 22 возможных аргумента:

$$\begin{aligned} X_1 = \Phi_0, \quad X_2 = \Phi_{-1}, \quad X_3 = \Phi_{-2}, \quad X_4 = P_0, \quad X_5 = P_{-1}, \quad X_6 = P_{-2}, \quad X_7 = N_{+}, \\ X_8 = N_0, \quad X_9 = N_{-1}, \quad X_{10} = N_{-2}, \quad X_{11} = C_{+1}, \quad X_{12} = C_0, \quad X_{13} = C_{-1}, \quad X_{14} = \\ = C_{-2}, \quad X_{15} = V_0, \quad X_{16} = V_{-1}, \quad X_{17} = V_{-2}, \quad X_{18} = \alpha_{+1}, \quad X_{19} = \alpha_0, \quad X_{20} = \\ = \alpha_{-1}, \quad X_{21} = \alpha_{-2}, \quad X_{22} = T. \end{aligned}$$

Синтезировались уравнения для управления, отличающиеся от уравнений прогнозирования, приведенных выше, тем, что вычислительной машине было разрешено использовать будущие значения возмущающего ($+N$) и регулирующих (C_{+1} и α_{+1}) воздействий среди возможных аргументов. Эти уравнения нельзя использовать для процедуры прогнозирования.

Алгоритмы МГУА позволяют получить как уравнения прогнозирования, так и уравнения управления в зависимости от заданного списка возможных аргументов. Все переменные нормализованы в отклонениях от среднего:

$$\begin{aligned} i = \frac{I - \bar{I}}{\bar{I}}; \quad p = \frac{P - \bar{P}}{\bar{P}}; \quad n = \frac{N - \bar{N}}{\bar{N}}; \quad c = \frac{C - \bar{C}}{\bar{C}}; \quad v = \frac{V - \bar{V}}{\bar{V}}; \quad \alpha = \\ = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}; \quad t = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}}. \end{aligned}$$

Все сказанное выше определяет следующий общий вид уравнений модели динамики Мира:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Phi}{\Delta T} &= f_1(x_1 x_2 \dots x_{22}); \\ \frac{\Delta P}{\Delta T} &= f_2(x_1 x_2 \dots x_{22}); \\ \Delta V &= f_3(x_1 x_2 \dots x_{22}), \end{aligned}$$

где f_1, f_2, f_3 — линейные полиномы.

Сравнительно большое число аргументов исключает возможность полного перебора. Согласно комбинаторному алгоритму МГУА, основанному на полном переборе, следовало бы получить оценки коэффициентов для всех возможных

полиномов, число которых для одной переменной превышает $5 \cdot 10^8$ (табл. 53). Всего нужно заполнить три таких таблицы (для трех свободных переменных исследуемой системы) и затем перебрать все возможные комбинации, чтобы найти три уравнения (по одному из каждой таблицы), дающие минимум критерия баланса переменных. Число полученных комбинаций уравнений — $C_{5000000}^3$. Так как объем такого перебора слишком велик, был применен многорядный алгоритм [65].

Таблица 53

Постепенное усложнение правой части
линейных дифференциальных уравнений регрессии

Пере- менная	Аргументы				
	x_1	x_2	x_3	...	x_{18}
$\Delta \Phi =$	$a_0 + a_1 x_1$	$a_0 + a_1 x_2 +$ $a_0 + a_1 x_2 +$ $+ a_2 x_1$	$a_0 + a_1 x_3 +$ $a_0 + a_1 x_3 +$ $+ a_2 x_1 +$ $a_0 + a_1 x_3 +$ $+ a_2 x_1 +$ $+ a_1 x_1 +$ $+ a_2 x_2$	...	$a_0 + a_2 x_{18} +$ $a_0 + a_2 x_{18} + a_3 x_{17} +$ $a_0 + a_2 x_{18} + a_3 x_{11} +$ $\dots$ $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 +$ $+ a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 +$ $+ a_6 x_6 + a_7 x_7 + a_8 x_8 +$ $+ a_9 x_9 + a_{10} x_{10} +$ $+ a_{11} x_{11} + a_{12} x_{12} +$ $+ a_{13} x_{13} + a_{14} x_{14} +$ $+ a_{15} x_{15} + a_{16} x_{16} +$ $+ a_{17} x_{17} + a_{18} x_{18} +$ $+ a_{19} x_{19} + a_{20} x_{20} +$ $+ a_{21} x_{21} + a_{22} x_{22}$
Число уравне- ний	2^0	2^1	2^2	...	2^{21}

Результаты синтеза уравнений управления. В программе [67] используется два регулируемых параметра:

F_1 — число уравнений, пропускаемое из ряда в ряд селекции, селектируемых по критерию несмещенности свободы выбора решений; F_2 — число уравнений на последнем ряду селекции (где достигается минимум смещения решений), отбираемых для образования комбинаций систем уравнений (по три). Число сравниваемых по критерию баланса вариантов систем уравнений равно $C_{F_2}^{F_1}$, где m — число свободных переменных системы. В программе принято $F_2 = 30$.

Свобода выбора решений F_1 постепенно увеличивалась для того, чтобы получить возможно более глубокий минимум критерия баланса. Машина выдала следующие результаты (время упреждения равно пяти интервалам, т. е. 25 годам):

$$\begin{aligned} B_{\min} &= 60\% \quad \text{при } F_1 = 30 \quad \text{переменных;} \\ B_{\min} &= 40\% \quad \text{при } F_1 = 60 \quad \text{переменных;} \\ B_{\min} &= 3,5\% \quad \text{при } F_1 = 120 \quad \text{переменных.} \end{aligned}$$

Дальнейшее увеличение свободы выбора F_1 уже неэффективно: глубина минимума не улучшается, следовательно, объем перебора выбран достаточным. При $F_1 = 120$ переменных и $F_2 = 30$ уравнений, отбираемых для образования

вариантов систем, получены следующие уравнения управления:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta T} = -11,256 - 1,301\Phi_0 + 0,000197V_0 + 0,0000141N_{-2} - 2,75\alpha_0 + \\ + 1,33\alpha_{-1} + 0,101T - 0,0000932C_{+1}, \quad \Delta\Phi = \Phi_{+1} - \Phi_0;$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = -339,4 + 0,0913V_0 + 0,0295V_{-1} + 0,14P_0 - 0,0322C_{-2} + \\ + 0,000177N_{+1} + 9,4\alpha_{+1}, \quad \Delta V = V_{+1} - V_0;$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = -2384 + 144\Phi_{-1} + 32,2\Phi_{-2} + 0,00243N_{-1} - 0,0241C_{-1} + \\ + 0,0924C_{-2} + 98,8\alpha_0 + 368\alpha_{-1} + \\ + 10,5T, \quad \Delta P = P_{+1} - P_0.$$

Таблица 54

Проверка точности уравнений управления

Время управления T_y , годы	Значение $\epsilon = \frac{I - \bar{I}}{\bar{I}} = \frac{\Phi_s - \bar{\Phi}_s}{\bar{\Phi}_s}$	
	По Форрестеру	По решению системы уравнений МГУА
10	0,84	0,81
20	0,74	0,667
30	0,67	0,553
40	0,62	0,495
50	0,59	0,52

Расчеты показывают, что селективные уравнения остаются оптимальными (по критерию баланса) только при $T_y \leq 40$ лет. При большем времени упреждения уравнение для переменной P несколько изменяется. Остальные два уравнения удовлетворяют балансу и при больших упреждениях прогноза (до $T_y \leq 80$ лет). Так как время упреждения прогноза принято равным 25 лет, то полученные уравнения достаточно подходят для расчета управления.

Проверка точности. Многократное интегрирование полученных уравнений дало результаты, приведенные в табл. 54. Как видно из таблицы, расхождение решений не очень велико.

Процедура селекции по двум критериям применена потому, что критерий несмещенности обладает плавностью характеристики, необходимой для много-рядной селекции; критерий баланса плавностью характеристики (в функции сложности модели) не обладает, он требует полного перебора модели.

Метод синтеза управления с оптимизацией прогноза для линейных систем при малом числе регулирующих воздействий. Уравнения и функционал оптимальности линейны, следовательно, задача синтеза управления с оптимизацией прогноза сравнительно не трудна. Если уравнения линейны, управление с оптимизацией имеет следующие свойства:

на каждом такте времени могут быть выбраны только наименьшие или наибольшие значения регулирующих воздействий;

управление, выбранное на первом шаге, остается оптимальным для всех последующих шагов. Если же изменяются уравнения, управление может также изменяться.

Уравнения должны синтезироваться снова и снова, при каждом поступлении новых точек интерполяции. Если поступающие новые

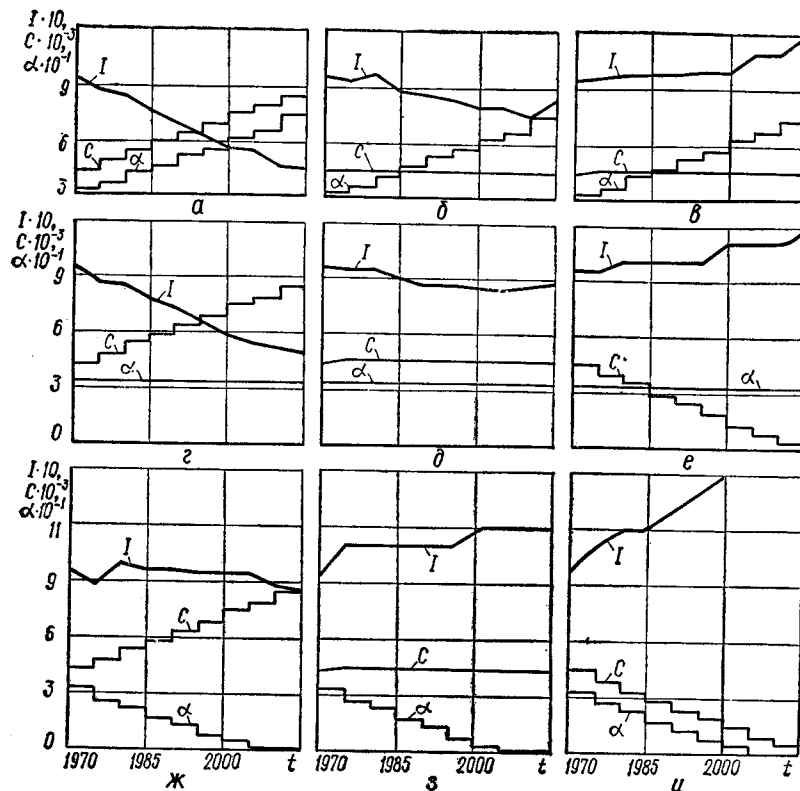


Рис. 52. Возможные сценарии управления с оптимизацией прогноза: а — $\Delta C = +500$, $\Delta\alpha = +0,05$ (I вариант); б — $\Delta C = 0$, $\Delta\alpha = +0,05$ (II вариант); в — $\Delta C = -500$, $\Delta\alpha = +0,05$ (III вариант); г — $\Delta C = +500$, $\Delta\alpha = 0$ (IV вариант); д — $\Delta C = 0$, $\Delta\alpha = 0$ (V вариант); е — $\Delta C = -500$, $\Delta\alpha = 0$ (VI вариант); ж — $\Delta C = +500$, $\Delta\alpha = -0,05$ (VII вариант); з — $\Delta C = 0$, $\Delta\alpha = -0,05$ (VIII вариант); и — $\Delta C = -500$, $\Delta\alpha = -0,05$ (IX вариант).

точки не изменяют уравнения значительно, необходимо сравнить между собой только девять возможных вариантов управления:

- а) $\Delta C = +500$, $\Delta\alpha = +0,05$; е) $\Delta C = -500$, $\Delta\alpha = 0$;
- б) $\Delta C = 0$, $\Delta\alpha = +0,05$; ж) $\Delta C = +500$, $\Delta\alpha = -0,05$;
- в) $\Delta C = -500$, $\Delta\alpha = +0,05$; з) $\Delta C = 0$, $\Delta\alpha = -0,05$;
- г) $\Delta C = +500$, $\Delta\alpha = 0$; и) $\Delta C = -500$, $\Delta\alpha = -0,05$;
- д) $\Delta C = 0$, $\Delta\alpha = 0$;

Интегрируя уравнения шаг за шагом, можно выбрать оптимальный вариант управления, дающий на каждом такте $I_t \rightarrow \max$.

Таблица 55

Результаты интегрирования уравнений управления

Параметры						
Годы	I	$V \times 10^{-3}$	$P \times 10^{-3}$	$N \times 10^{-4}$	$C \times 10^{-3}$	α
Вариант «а»						
1975	0,88	3,2	4,1	75	4,9	0,37
1980	0,84	3,8	4,3	73	5,4	0,42
1985	0,76	4,5	4,5	71	5,9	0,47
1990	0,69	5,3	4,7	68	6,4	0,52
1995	0,62	6,1	4,9	66	6,9	0,57
2000	0,56	7,2	5,0	64	7,4	0,62
2005	0,54	8,3	5,1	61	7,9	0,67
2010	0,47	9,5	5,3	59	8,4	0,72
2015	0,45	10,9	5,4	57	8,9	0,77
2020	0,46	12,4	5,4	55	9,4	0,82

Вариант «б»

1975	0,92	3,2	4,1	75	4,4	0,37
1980	0,99	3,8	4,3	73	4,4	0,42
1985	0,87	4,5	4,5	71	4,4	0,47
1990	0,84	5,3	4,7	68	4,4	0,52
1995	0,81	6,2	4,8	66	4,4	0,57
2000	0,79	7,2	4,9	64	4,4	0,62
2005	0,79	8,4	5,0	61	4,4	0,67
2010	0,72	9,7	4,9	59	4,4	0,72
2015	0,82	11,2	4,9	57	4,4	0,77
2020	0,86	12,8	4,8	55	4,4	0,82

Продолжение табл. 55

Вариант «в»

1975	0,97	3,2	4,1	75	4,4	0,37
1980	0,99	3,8	4,3	73	4,4	0,42
1985	0,99	4,5	4,5	71	4,4	0,47
1990	0,99	5,3	4,7	68	4,4	0,52
1995	1,0	6,3	4,8	66	4,4	0,57
2000	1,0	7,4	4,8	64	4,4	0,62
2005	1,1	8,6	4,8	61	4,4	0,67
2010	1,1	1,0	4,6	59	4,4	0,72
2015	1,2	11,5	4,4	57	4,4	0,77
2020	1,2	13,2	4,2	55	4,4	0,82

Вариант «г»

1975	0,88	3,2	4,1	75	4,9	0,32
1980	0,84	3,8	4,3	73	5,4	0,32
1985	0,77	4,5	4,5	71	5,9	0,32
1990	0,71	5,3	4,7	68	6,4	0,32
1995	0,65	6,2	4,8	66	6,9	0,32
2000	0,59	7,1	5,0	64	7,4	0,32
2005	0,55	8,2	5,1	61	7,9	0,32
2010	0,51	9,5	5,2	59	8,4	0,32
2015	0,5	10,8	5,3	57	8,9	0,32
2020	0,5	12,4	5,4	55	9,4	0,32

Продолжение табл. 55

Вариант «д»

1975	0,92	3,2	4,1	75	4,4	0,32
1980	0,92	3,8	4,3	73	4,4	0,32
1985	0,89	4,5	4,5	71	4,4	0,32
1990	0,86	5,3	4,7	68	4,4	0,32
1995	0,84	6,2	4,8	66	4,4	0,32
2000	0,83	7,0	4,9	64	4,4	0,32
2005	0,82	8,4	4,9	61	4,4	0,32
2010	0,84	9,7	4,9	59	4,4	0,32
2015	0,86	11,2	4,9	57	4,4	0,32
2020	0,92	12,7	4,7	55	4,4	0,32

Вариант «е»

1975	0,97	3,2	4,1	75	3,9	0,32
1980	1,0	3,8	4,3	73	3,4	0,32
1985	1,0	4,5	4,5	71	2,9	0,32
1990	1,0	5,3	4,7	68	2,4	0,32
1995	1,0	6,3	4,8	66	1,9	0,32
2000	1,1	7,3	4,8	64	1,4	0,32
2005	1,1	8,6	4,7	61	0,9	0,32
2010	1,1	9,9	4,6	59	0,4	0,32
2015	1,2	11,5	4,4	57	0	0,32
2020	1,3	13,2	4,1	55	0	0,32

Продолжение табл. 55

Вариант «ж»

1975	0,88	3,2	4,1	75	4,9	0,27
1980	0,98	3,8	4,3	73	5,4	0,22
1985	0,94	4,5	4,5	71	5,9	0,17
1990	0,94	5,3	4,6	68	6,4	0,12
1995	0,93	6,1	4,7	66	6,9	0,7
2000	0,93	7,1	4,8	64	7,4	0,2
2005	0,93	8,2	4,9	61	7,9	0
2010	0,85	9,3	4,9	59	8,4	0
2015	0,82	10,6	4,9	57	8,9	0
2020	0,81	12,1	4,9	55	9,4	0

Вариант «з»

1975	0,93	3,2	4,1	75	4,4	0,27
1980	1,1	3,8	4,3	73	4,4	0,22
1985	1,1	4,5	4,5	71	4,4	0,17
1990	1,1	5,3	4,6	68	4,4	0,12
1995	1,1	6,2	4,7	66	4,4	0,7
2000	1,2	7,2	4,7	64	4,4	0,2
2005	1,2	8,3	4,7	61	4,4	0
2010	1,2	9,6	4,6	59	4,4	0
2015	1,2	11,0	4,4	57	4,4	0
2020	1,2	12,5	4,3	55	4,4	0

Продолжение табл. 55

Вариант «и»						
1975	0,97	3,2	4,1	75	3,9	0,27
1980	1,1	3,8	4,3	73	3,4	0,22
1985	1,2	4,5	4,5	71	2,9	0,17
1990	1,2	5,3	4,6	68	2,4	0,12
1995	1,3	6,2	4,7	66	1,9	0,7
2000	1,4	7,3	4,6	64	1,4	0,2
2005	1,5	8,5	4,5	61	0,9	0
2010	1,5	9,8	4,3	59	0,4	0
2015	1,5	11,3	4,0	57	0	0
2020	1,6	12,9	3,6	55	0	0

Такой метод называется методом оптимизации при помощи полного перебора вершин гиперкуба возможных управлений [37].

Только оптимальные значения регулирующих воздействий для первого такта поступают на управление, а в начале следующего второго такта все пересчитывается заново. Таким образом, используется скользящий интервал упреждения.

Максимум показателя качества может быть достигнут несколько позже (по сравнению с управлением на неподвижном интервале), в области двух-трехкратного значения времени упреждения. С каждым годом цель оптимизации отодвигается на год дальше.

Результаты интегрирования уравнений управления. В примере 23 предположили, что управление начнется с 1980 г. Результаты расчета рассматриваемого вида оптимального управления показаны на рис. 52 и в табл. 55. Полученные результаты полностью подтверждают гипотезу, высказанную в работе [79]: основной причиной непрерывной интенсивности использования биосферы нашей планеты является непрерывный рост капиталовложений. Если этот рост почему-либо нельзя остановить, то можно выбрать любой другой вариант. Вариант «в» можно считать, по-видимому, оптимальным вариантом управления. Как видно, машинное управление, начинающееся с 1980 г., может дать довольно хорошие результаты.

Чтобы сказать об этом более определенно, нужно еще проследить результат управления в замкнутой системе мир — ЭВМ в течение длительного интервала времени. Здесь же рассмотрен только синтез одного очередного управления на 1980 г.

Объективные уравнения динамики позволяют выполнить системный многократный дифференциальный прогноз хода мировых показателей для разных вариантов выбора регулирующих воздействий и синтезировать управление с оптимизацией прогноза и учетом всех возможностей. Результаты будут тем лучше, чем раньше начнутся процессы управления. Изменяя в ряде прогнозов дату начала управления биосферой Земли (1980 г.), можно установить срок, после которого задачу минимизации загрязнения биосферы уже нельзя будет решить удовлетворительно.

Таким образом, прямые методы моделирования по коротким последовательностям данных дают возможность получить объективную модель Мира, синтезируемую вычислительной машиной без каких-либо субъективных предположений человека.

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПРОГНОЗА ПО ПРИНЦИПУ МАКСИМУМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТА

Рассматривается система управления с оптимизацией прогноза, отвечающая основным принципам подхода самоорганизации. В системе применена линейная прогнозирующая модель, действующая только на локальном (ограниченном) интервале времени упреждения. Простота модели позволила применить для оптимизации принцип максимума Понтрягина при скользящем интервале оптимизации и выяснить основные свойства указанной системы.

Для существующего детерминистического подхода к решению задачи оптимального управления сложными объектами характерно предположение о том, что оценка принимаемого решения может быть дана одновременно с этим решением, без использования аппарата прогноза. В детерминированной среде, где нет непредвиденного хода событий, это не вызывает возражений.

Подход самоорганизации предполагает, что непредвиденный ход развития принципиально всегда существует, и поэтому оценка решения, принятого в данный момент, может быть дана только впоследствии, в последующие моменты принятия очередных решений по управлению. Для систем однократного действия наиболее полная оценка решений может быть дана только в последний момент существования объекта, а для длительно существующих систем — оценка, получаемая при помощи прогноза с бесконечным временем упреждения. Так можно теоретически прийти к агностицизму, так как

прогнозы с бесконечным временем упреждения невозможны. Следовательно, принципиально нельзя никогда оценить принимаемое в данный момент решение.

Это положение изменяет устанавливаемый ниже асимптотический закон управления с оптимизацией прогноза: при увеличении времени упреждения прогноза оценки принятых в прошлом решений изменяются все меньше и меньше и стремятся (монотонно или с затухающими колебаниями) к постоянным значениям.

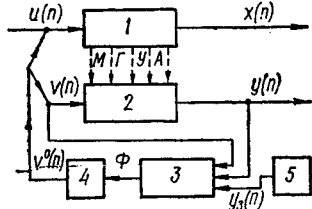


Рис. 53. Структурная схема системы управления с самоорганизацией модели объекта и управления с оптимизацией прогноза:

1 — объект управления; 2 — прогнозирующая локальная математическая модель объекта (ПЛММ); 3 — устройство для вычисления квадратичного функционала — показателя качества управления с оптимизацией прогноза; 4 — устройство для вычисления оптимального управления; 5 — элемент задания плана.

Следовательно, оценка решения, получаемая при помощи прогноза с достаточно большим временем упреждения, является правильной и не изменяется при дальнейшем увеличении времени упреждения. Важным является также выяснение вопросов устойчивости замкнутой системы управления с оптимизацией прогноза.

В отличие от работы [41] о непрерывных фильтрах ниже рассматриваются системы с дискретными линейными прогнозирующими фильтрами.

В этих системах оптимальное управление процессами находится по принципу максимума Понтрягина. В случае решения задачи большой размерности и при нелинейных фильтрах следует применять принципы самоорганизации.

Структурная схема системы управления с оптимизацией прогноза, реализующая принцип самоорганизации, показана на рис. 53. Объект управления имеет следующую особенность: будущее его состояние на интервале времени, равном времени упреждения, может быть достаточно точно предсказано при помощи линейной прогнозирующей модели. Такая модель действительна на коротком скользящем интервале времени, который и принимается в качестве интервала упреждения прогноза.

Прогнозирующая локальная математическая модель объекта (ПЛММ) синтезируется по принципу самоорганизации.

Средства синтеза самоорганизации линейной прогнозирующей модели на рисунке показаны пунктиром. Наиболее точные прогнозирующие модели синтезируются при помощи алгоритмов Метода Группового Учета Аргументов (МГУА). По этим алгоритмам можно синтезировать как простые линейные, так и более сложные предсказывающие модели, вплоть до неоднородных нелинейных моделей с запаздывающими аргументами — моделей оптимальной сложности.

Пусть свойства объекта оказались такими, что несложные линейные модели обеспечивают достаточно точные прогнозы. Это предположение значительно облегчит задачу и позволит установить основные свойства систем управления с оптимизацией прогноза (в частности, открыть указанный выше асимптотический закон), выяснить вопросы устойчивости, что и является главной целью.

Рассмотрим динамический объект, состояние которого характеризуется вектором входов $\bar{u}(n)$ и выходов $\bar{x}(n)$. Зная небольшое число экспериментальных точек (одновременных замеров векторов входов и выходов), при помощи МГУА можно получить прогнозирующую локальную математическую модель объекта (ПЛММ). Ограничимся случаями, когда эта модель оказывается несложной, отвечающей линейному уравнению. Модель может содержать запаздывающие аргументы, однако каждый из них приходится считать отдельной независимой переменной. ПЛММ может быть либо непрерывной, либо дискретной. Алгоритмы МГУА позволяют получить ее в виде системы линейных разностных уравнений, коэффициенты которых, в общем случае, изменяются с каждым дискретным интервалом времени:

$$\Delta \bar{y}_k = A_k^* \bar{y}_k + B_k \bar{v}_k, \quad (1)$$

где $\Delta \bar{y}_k \triangleq \bar{y}_{k+1} - y_k$; размер матриц и векторов: $\bar{y}_k - m \times 1$, $A_k^* - m \times m$; $n \leq k \leq n + N_y$, $\bar{v}_k - v \times 1$, $B_k - m \times 1$, $n = 0, 1, 2, \dots, N_y > 0$; N_y — число интервалов упреждения прогноза, т. е. то число тактов, на котором движение динамического объекта достаточно точно описывается уравнением (1) при условии, что на каждом текущем n -такте выполняется начальное условие

$$\bar{y}_{k/k=n} \triangleq \bar{X}_n.$$

Таким образом, ПЛММ аппроксимирует собой динамику объекта, по крайней мере, в пределах N_y тактов упреждения.

В качестве критерия качества управления с оптимизацией прогноза выберем функционал вида

$$I \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i=n_n}^{n_k} [(\bar{X}_{zi} - \bar{X}_i)^T Q_i (\bar{X}_{zi} + \bar{X}_i) + \bar{u}_i^T R_i \bar{u}_i], \quad (2)$$

где матрицы весовых коэффициентов $Q_i > 0$, $R_i > 0$ положительно определенные размерами $m \times m$ и $r \times r$ соответственно; $\bar{X}_{zi}$ — задающее воздействие (элемент 5 на рис. 56); n_n и n_k — начальный и конечный такты времени.

Задача управления с оптимизацией прогноза состоит в том, чтобы функционал был минимальным на всей траектории будущего

движения объекта от момента времени $n = 0$ до $n_k = \infty$. В случае необходимости максимизировать (минимизировать) значение какой-либо выходной координаты объекта задающее воздействие по этой координате устанавливается больше максимально (меньше минимально) возможного ее значения.

Так как бесконечный прогноз невозможен и вместо объекта доступна только его модель, действующая достаточно точно лишь на N_y тактов вперед, вместо указанного выше функционала I приходится минимизировать усеченный его аналог:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{n+N_y} [(\bar{y}_{3k} - \bar{y}_k)^T Q_k (\bar{y}_{3k} - \bar{y}_k) + \bar{V}_k^T R_k \bar{V}_k], \quad (3)$$

где y_s — прогнозируемое значение задания, выбираемое указанным выше способом.

Таким образом, от задачи минимизации функционала (2) на бесконечном интервале времени переходим к задаче минимизации функционала (3) на скользящем интервале времени длиной N_y тактов. Минимизация достигается при помощи выбора последовательности оптимальных значений $\bar{v}_k^0$ в пределах интервала упреждения. Однако в качестве управляющего воздействия u_n , подаваемого на вход объекта, используется только первый член этой последовательности. На новом такте вся последовательность управляющих воздействий пересчитывается, и снова используется только первый член, соответствующий первому такту скользящего интервала упреждения и т. д.

Например, пусть в конце 1973 г. для управления экономикой страны найдена последовательность оптимальных управлений на четыре года вперед (1974—1977 гг.), минимизирующая функционал. Тогда в 1974 г. для управления используется лишь одно значение $\bar{u}_{1974} = \bar{v}_{1974}^0$. В следующем, 1975 г., последовательность оптимальных управлений пересчитывается с учетом новых значений коэффициентов ПЛММ, которые могут изменяться в конце каждого года. Такой закон формирования управления объектом называется управлением с оптимизацией прогноза.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА И ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ *

Для вывода уравнений движения замкнутой системы необходимо решить задачу синтеза оптимизирующей последовательности $\bar{V}_k^0$, т. е. найти ее как функцию фазовых координат $\bar{y}_k$ и $\bar{X}_k$ и числа тактов скользящего интервала.

* Раздел написан совместно с аспирантами В. А. Толокняненко и А. Г. Яременко.

Рассмотрим условия минимума функционала (3) в форме дискретного аналога принципа максимума Л. С. Понтрягина, которые для ПЛММ вида (1) являются необходимыми и достаточными:

$$\begin{aligned} \bar{y}_k^0 &= \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_k^0} H_k^0; \\ \Delta \bar{\psi}_k^0 &= - \frac{\partial}{\partial \bar{y}_k^0} H_k^0; \\ \frac{\partial}{\partial \bar{V}_k^0} H_k^0 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При краевых условиях

$$\bar{y}_{k/k=n}^0 \equiv \bar{X}_n, \bar{\psi}_{k/k=n+N_y}^0 \equiv 0,$$

где

$$\begin{aligned} H^0(k_1, \bar{y}_k^0, \bar{\psi}_k^0, \bar{V}_k^0) &\triangleq \bar{\psi}_k^{0T} (A_k^* \bar{y}_k^0 + B_k \bar{V}_k^0) - \\ &- \frac{1}{2} [(\bar{y}_{3k} - \bar{y}_k^0)^T Q_k (\bar{y}_{3k} - \bar{y}_k^0) + \bar{V}_k^{0T} R_k \bar{V}_k^0]. \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение системы (4) относительно искомой функции $\bar{V}_k^0$, получим:

$$\bar{V}_k^0 = R_k^{-1} B_k^T \bar{\psi}_k^0. \quad (5)$$

Тогда первые два уравнения с учетом выражения (5) примут вид:

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{y}_k^0 + 1 \\ \bar{\psi}_{k-1}^0 \end{array} \right\| = G_k \left\| \begin{array}{c} \bar{y}_k^0 \\ \bar{\psi}_k^0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -Q_k \end{array} \right\| \bar{y}_{3k}, \quad (6)$$

где

$$G_k \triangleq \left\| \begin{array}{cc} A_k & P_k \\ -Q_k & A_k^T \end{array} \right\|; \quad A_k \triangleq A_k^* + E; \quad P_k \triangleq B_k R_k^{-1} B_k^T,$$

причем матрицы A_k и P_k имеют размер $m \times m$, а матрица G_k — $2m \times 2m$ элементов. Для определения $\bar{\psi}_{k/k=n}^0$ необходимо решить краевую задачу для системы уравнений (6) при условиях (4).

Одной из особенностей дискретного аналога принципа максимума является то обстоятельство, что если уравнения движения объекта взяты в прямых разностях, то уравнение сопряженной системы получается в обратных разностях, и наоборот. Это создает определенные трудности в представлении общего решения системы (6), поэтому при помощи несложного преобразования, в предположении, что $|A_k| \neq 0$, рассмотрим эквивалентную ей систему при условиях (4):

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{y}_{k+1}^0 \\ \bar{\psi}_{k+1}^0 \end{array} \right\| = L_k \left\| \begin{array}{c} \bar{y}_k^0 \\ \bar{\psi}_k^0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ C_{k+1} \end{array} \right\| \bar{y}_{3k+1}, \quad (7)$$

где

$$L_k \triangleq \left\| \begin{matrix} A_k & P_k \\ (A_{k+1}^{-1})^T (Q_{k+1} A_k + E) (A_{k+1}^{-1})^T (Q_{k+1} P_k + E) \end{matrix} \right\|, \quad C_{k+1} \triangleq \\ \triangleq - (A_{k+1}^{-1})^T Q_{k+1}.$$

Тогда решение системы (7) на всем интервале от n до $n + N_y$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_k^0 \\ \bar{\psi}_k^0 \end{pmatrix} = \varphi(k, n) \begin{pmatrix} \bar{y}_n^0 \\ \bar{\psi}_n^0 \end{pmatrix} + \sum_{i=n}^{k-1} \varphi(k, i+1) \begin{pmatrix} 0 \\ C_{i+1} \end{pmatrix} \bar{y}_{3i+1}, \quad (8)$$

где

$$\varphi(k, n) \triangleq \begin{pmatrix} \varphi_{11}(k, n) & \varphi_{12}(k, n) \\ \varphi_{21}(k, n) & \varphi_{22}(k, n) \end{pmatrix}$$

— фундаментальная матрица решений размером $2m \times 2m$, удовлетворяющая тождеству

$$\varphi(k+1, n) \equiv L_k \varphi(k, n), \quad \forall k: n \leq k \leq n + N_y$$

и условию

$$\varphi(k, n) \equiv E.$$

Эту матрицу можно представить в виде

$$\varphi(k, n) \triangleq \begin{cases} \prod_{i=n}^{k-1} L_i, & k > n, \\ E, & k = n. \end{cases}$$

Из решений (8) следует, что

$$\bar{\psi}_k^0 = \varphi_{21}(k, n) \bar{y}_n^0 + \varphi_{22}(k, n) \bar{\psi}_n^0 + \sum_{i=n}^{k-1} \varphi_{22}(k, i+1) C_{i+1} \bar{y}_{3i+1}. \quad (9)$$

Решим уравнение (9) относительно $\bar{\psi}_n^0$, учитывая тождество

$$\varphi_{22}^{-1}(k, n) \varphi_{22}(k, i+1) \equiv \varphi_{22}(n, i+1)$$

и краевые условия (4):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n^0 &= - \varphi_{22}^{-1}(n + N_y, n) \varphi_{21}(n + N_y, n) \bar{X}_n - \\ &- \sum_{i=n}^{n+N_y-1} \varphi_{22}(n, i+1) C_{i+1} \bar{y}_{3i+1}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (8), получим программу оптимальной траектории движения объекта на скользящем интервале:

$$\begin{aligned} \bar{y}_k^0 &= [\varphi_{11}(k, n) - \varphi_{12}(k, n) \varphi_{22}^{-1}(n + N_y, n) \varphi_{21} \times \\ &\times (n + N_y, n) \bar{X}_n - \varphi_{12}(k, n) \sum_{i=n}^{n+N_y-1} \varphi_{22}(n, i+1) C_{i+1} \bar{y}_{3i+1}]. \quad (10) \end{aligned}$$

Это та траектория, по которой двигался бы объект, если бы оптимальная управляющая последовательность $\bar{V}_k^0$ не пересчитывалась на каждом текущем такте n .

После подстановки выражения (9) в (5) и с учетом условий (4) получим выражение для текущего управляющего воздействия в функции фазовых координат объекта $\bar{X}_n$ и числа тактов упреждения прогноза N_y :

$$\bar{U}_n \triangleq \bar{V}_k^0|_{k=n} = - R_n^{-1} B_n^T [K_n(N_y) \bar{X}_n + D_n(N_y, \bar{y}_{3i})], \quad (11)$$

где

$$K_n(N_y) \triangleq \varphi_{22}^{-1}(n + N_y, n) \varphi_{21}(n + N_y, n) \quad (12)$$

— матрица переменных коэффициентов, зависящих от N_y , а

$$D_n(N_y, \bar{y}_{3i}) \triangleq \sum_{i=n}^{n+N_y-1} \varphi_{22}(n, i+1) C_{i+1} \bar{y}_{3i+1} \quad (13)$$

— функционал, зависящий от прогнозируемых значений задающего воздействия $\bar{y}_{3i}$ и параметра N_y .

Таким образом, алгоритм уравнения по принципу оптимизации прогноза значений функционала (4) эквивалентен (при указанных условиях) найденному линейному закону управления с переменными параметрами, коэффициенты цепи обратной связи и цепи задающего воздействия которого зависят от числа тактов интервала упреждения N_y . Уравнение движения замкнутой системы

$$\bar{X}_{n+1} = [A_n - P_n K_n(N_y)] \bar{X}_n - P_n D_n(N_y, \bar{y}_{3i}).$$

С учетом принятых обозначений (7), (12), (13) выразим уравнение движения замкнутой системы через параметры ПЛММ и критерий качества:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= [A_n - B_n R_n^{-1} B_n^T \varphi_{22}^{-1}(n + N_y, n) \varphi_{22}(n + N_y, n)] \bar{X}_n + \\ &+ B_n R_n^{-1} B_n^T \sum_{i=1}^{n+N_y-1} \varphi_{22}(n, i+1) (A_{i+1}^{-1})^T Q_{i+1} \bar{y}_{3i+1}, \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}(k, n) & \varphi_{12}(k, n) \\ \varphi_{12}(k, n) & \varphi_{22}(k, n) \end{matrix} \right\| \triangleq \\ &\triangleq \begin{cases} \prod_{i=n}^{k-1} \left\| \begin{matrix} A_i & B_i R_i^{-1} B_i^T \\ (A_{i+1}^{-1})^T (Q_{i+1} A_i + E) (A_{i+1}^{-1})^T (Q_{i+1} B_i R_i^{-1} B_i^T + E) \end{matrix} \right\|, & k > n; \\ E, & k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение уравнений (14), т. е. траекторию движения замкнутой системы от начального положения $\bar{X}_0$ до текущего $\bar{X}_n$, можно

представить в виде

$$\bar{X}_n = F(n, 0) \bar{X}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} F(n, j+1) P_j D_j(N_y, y_{ji}), \quad (15)$$

где

$$F(n, 0) \triangleq \begin{cases} \prod_{l=0}^{n-1} [A_l - P_l K_l(N_y)], & n > 0; \\ E, & n < 0 \end{cases}$$

— фундаментальная матрица.

Если матрица L_k — стационарная и матрица коэффициентов $K_l(N_y)$ зависит лишь от параметра N_y , то фундаментальная матрица принимает вид

$$F(n, 0) \equiv [A - PK(N_y)]^n.$$

Учитывая общий вид решения уравнения движения замкнутой системы, можно сделать следующие выводы:

уравнение движения замкнутой системы (15) имеет тот же порядок, что и ПЛММ объекта. В этом отношении управление с оптимизацией прогноза при принятых допущениях аналогично введению жесткой линейной обратной связи;

в качестве задающего сигнала для замкнутого контура управления используется усредненное с определенным весом за N_y тактов прогнозируемое значение задающего воздействия;

свойства замкнутого контура полностью определяются матрицей

$$A_{zn}(N_y) \triangleq A_n - P_n K_n(N_y),$$

зависящей от времени упреждения прогноза (параметра N_y). Эта зависимость обусловлена наличием матрицы коэффициентов $K_n(N_y)$, которая однозначно определяется фундаментальной матрицей решений $\Phi(n + N_y, n)$;

траектория движения замкнутой системы определяется выражением (15), а программа оптимального движения на интервале упреждения — выражением (10). В результате анализа этих выражений оказалось, что в общем случае объект, замыкаемый через оптимизацию прогноза, движется по траектории (15), отличающейся от программ оптимального движения (10), вычисляемой на каждом текущем n -такте на всем интервале упреждения, и приближается к ней при $n \rightarrow \infty$. При произвольном $N_y \neq 0$ траектория движения замкнутой системы является огибающей к семейству программ оптимального движения, порядок касания которой не ниже первого (т. е. на каждом n -такте траектории совпадают не только по значениям, но и по величине первых разностей).

Таким образом, получены в общем виде как уравнение движения многомерной нестационарной замкнутой системы управления с

оптимизацией прогноза, так и его решение. Более подробно исследование полученных выражений весьма затруднено из-за их сложности. Дальнейшее исследование многомерных стационарных систем практически целесообразно проводить с помощью современной вычислительной техники, поэтому ограничимся исследованием одномерной системы, которую удастся анализировать без особых трудностей.

Исследование одномерной системы. Рассмотрим одномерный процесс, инвариантный во времени, ПЛММ которого примем в виде

$$y_{k+1} = ay_k + bv_k.$$

Инвариантность во времени означает, что коэффициенты a и b остаются постоянными на всем интервале упреждения прогноза. Критерий качества

$$\Phi \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{n+N_y} (qy_k^2 + rv_k^2);$$

гамильтониан

$$H^0 \triangleq \psi_k^0 (ay_k + bv_k^0) - \frac{1}{2} (qy_k^{02} + rv_k^{02}).$$

Оптимальная последовательность управлений на интервале упреждения прогноза:

$$v_k^0 = r^{-1} b \psi_k^0.$$

Преобразованная система сопряженных уравнений (7) с краевыми условиями:

$$\left\| \begin{matrix} y_{k+1}^0 \\ \psi_{k+1}^0 \end{matrix} \right\| = L \left\| \begin{matrix} y_k^0 \\ \psi_k^0 \end{matrix} \right\|, \quad \begin{cases} y_k^0|_{k=n} \equiv x_n; \\ \psi_k^0|_{k=n+N_y} \equiv 0, \end{cases}$$

где

$$L \triangleq \left\| \begin{matrix} a & p \\ q & a^{-1}(pq+1) \end{matrix} \right\|, \quad p \triangleq r^{-1}b^2.$$

Характеристическое уравнение матрицы L

$$|L - zE| \equiv z^2 - [a + a^{-1}(pq+1)]z + 1 = 0.$$

Отметим следующие свойства собственных чисел матрицы L :

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \{a + a^{-1}(pq+1) \pm \sqrt{[a + a^{-1}(pq+1)]^2 - 4}\}.$$

Свойство 1. Оба корня действительные и разные.

Характер корней можно установить, рассмотрев их дискриминант. Он всегда положительный, так как, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \pm 0} D(a) &\rightarrow \infty, & \lim_{a \rightarrow \pm \infty} D(a) &\rightarrow \infty, \\ a &\rightarrow \pm 0 & a &\rightarrow \pm \infty, \end{aligned}$$

а с другой, — он принимает минимальное положительное значение, равное

$$D_{\min} \stackrel{\Delta}{=} D(a_{1,2}^*) \equiv 4pq > 0$$

при двух действительных значениях a :

$$a_{1,2}^* \equiv \pm (pq + 1)^{\frac{1}{2}},$$

где p и q , по условию (14), всегда положительны.

Свойство 2. Тожество $z_{1,2} \equiv z_{2,1}^{-1}$ выполняется при любых a , p и q .

Это следует из равенства единице отношения свободного члена характеристического уравнения к коэффициенту при z^2 .

Свойство 3. Из свойств 1 и 2 следует, что одно из собственных чисел всегда по модулю значительно меньше единицы при любых a , p и q . Это собственное число обозначим через z , тогда второе число (согласно свойству 2) равно z^{-1} :

$$z \stackrel{\Delta}{=} a^{-1} \left[\frac{a^2 + pq + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2 + pq + 1}{2} \right)^2 - a^2} \right]. \quad (16)$$

Число z является нечетной функцией параметра объекта a , т. е.

$$z(a) \equiv -z(-a),$$

причем $\lim_{a \rightarrow 0} z(a) \rightarrow 0$, а $\text{sign } z \equiv \text{sign } a$.

Величина z заключена между значениями

$$1 < z(-a^*) \leq z(a) \leq z(a^*) \leq 1; \quad a \in (-\infty, \infty),$$

где

$$z(\pm a^*) \stackrel{\Delta}{=} \pm \sqrt{pq + 1} - \sqrt{pq}.$$

Найдем собственные векторы матрицы L и образуем из них матрицу преобразования подобия:

$$T \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} p & \\ z - a & z^{-1} - a \end{pmatrix}; \quad |T| \equiv p(z^{-1} - z) \neq 0.$$

Тогда фундаментальная матрица системы (7) примет вид:

$$\Phi(n + N_y, n) \equiv L^{N_y} \equiv T z^{N_y} T^{-1},$$

где

$$z \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} z^{N_y} & 0 \\ 0 & z^{-N_y} \end{pmatrix}.$$

Коэффициент цепи обратной связи

$$K(N_y) \stackrel{\Delta}{=} \Phi_{22}^{-1}(N_y) \Phi_{21}(N_y) \equiv q \frac{z^{-N_y} - z^{N_y}}{(z^{-1} - a) z^{-N_y} (z - a) z^{N_y}}.$$

Закон управления

$$u_n = v_k^0|_{k=n} \equiv -b^{-1} p \frac{(z^{-N_y} - z^{N_y}) x_n}{(z^{-1} - a) z^{-N_y} (z - a) z^{N_y}}.$$

Уравнение движения замкнутой системы

$$x_{n+1} = a_3(N_y) x_n,$$

где

$$a_3(N_y) \stackrel{\Delta}{=} a + \frac{pq(z-a)(1-z^{2N_y})}{pq + (z-a)^2 z^{2N_y}} \equiv z \frac{pq + (z-a)^2 z^2 (N_y - 1)}{pq + (z-a)^2 z^{2N_y}}. \quad (17)$$

Таким образом, движение замкнутой системы описывается уравнением с постоянным коэффициентом, зависящим от числа тактов упреждения прогноза N_y . Исследуем эту зависимость.

Первый случай: $a_3(N_y)/_{N_y=0} = a$,

т. е. при отсутствии прогноза хотя бы на один такт вперед система размыкается. Так же, как и в случае непрерывной прогнозирующей модели [38], этот вывод справедлив для всех объектов без исключения. Он вытекает из самого принципа управления и вида оптимизируемого функционала (3).

В этом случае при $|a| > 1$

объект является неустойчивым, поэтому и $|a_3(0)| > 1$.

Второй случай: $\lim_{N_y \rightarrow \infty} a_3(N_y) \rightarrow z$, $|z| < 1$.

Величина z определяется выражением (16), которое, как было доказано выше, при любых a и положительных p и q всегда меньше единицы. Таким образом, как и в непрерывных системах [41], независимо от степени устойчивости или неустойчивости самого объекта и значений параметров минимизируемого функционала (достаточно, чтобы они были положительными) замкнутая предельная система при неограниченном числе тактов N_y , на которых осуществляется оптимизация прогноза, всегда устойчива. Величина $|z|$ монотонно уменьшается при уменьшении $pq \stackrel{\Delta}{=} b^2 \frac{q}{r}$. Это позволяет просто оценить влияние параметров функционала на движение предельной системы. Зависимость параметра предельной системы $a_3(\infty) = z(a)$ от параметра объекта a носит более сложный характер и изображена на рис. 54.

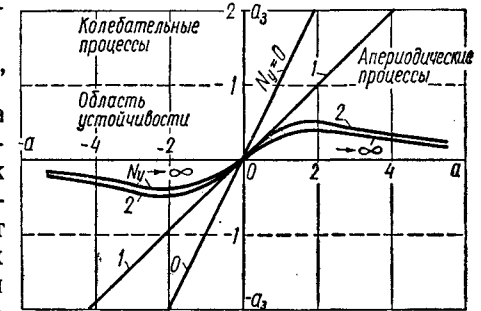


Рис. 54. Асимптотические характеристики системы управления с оптимизацией прогноза, при $p = 1$.

Особенность этой зависимости — наличие минимума запаса устойчивости замкнутой системы, который приходится на неустойчивые объекты со значением параметра $a_{1,2}^* = \pm (pq + 1)^{\frac{1}{2}}$. При этом объектам с большей неустойчивостью, у которых $|a| > |a^*|$, соответствуют предельные замкнутые системы с большим запасом устойчивости. Аналогичное явление отмечалось и в непрерывном случае [38] с той разницей, что там $a^* = 0$ и, таким образом, независимо от параметров функционала и коэффициента усиления разомкнутой системы, как это имеет место в дискретной системе.

В общем случае $0 < N_y < \infty$. Аналитически эта зависимость представлена выражением (17). На рис. 54 изображен график зависимости a_s в функции a и числа N_y .

Общие свойства и особенности решений:

1. Нечетность функции $a_s(a)$ при произвольном числе N_y , т. е. $a_s(a) \equiv -a_s(-a)$, причем $\text{sing } a_s \equiv \text{sing } a$.

Отсюда следует интересный и важный вывод.

Как известно, особенностью дискретных систем, не имеющих аналога в непрерывных, является существование даже в системах первого порядка специфических колебательных режимов при $a < 1$, затихающих при $-1 < a < 0$ и расходящихся при $-\infty < a < -1$. Эти свойства параметра a_s означают, что управление по принципу оптимизации прогноза при любом N_y не нарушает характера апериодичности и колебательности процессов объекта, а изменяет лишь их характеристики роста в сторону увеличения устойчивости.

2. При $N_y \geq 2$ и произвольном a , параметр замкнутой системы $|a_s| < 1$, т. е. для произвольного процесса первого порядка, инвариантного во времени, необходимо и достаточно иметь надежный прогноз всего лишь на два такта вперед, чтобы управление с оптимизацией этого прогноза по критерию (3) гарантировало устойчивость движения замкнутой системы.

Оптимизация прогноза на один такт вперед, как это видно из рис. 54, не обеспечивает устойчивости замкнутой системы при произвольном a , но все же расширяет область значений параметров объекта a , для которых устойчивость имеет место. Величина этой области зависит от параметров функционала качества и коэффициента усиления разомкнутой системы $pq \stackrel{\Delta}{=} b^2 \frac{q}{r}$ и растет с увеличением произведения pq .

3. При $N_y = 4$ зависимость $a_s(a)$ практически (при $pq = 1$ с точностью до $1 \cdot 10^{-2}$) совпадает с $z(a)$, т. е. в указанных условиях произвольный процесс первого порядка, инвариантный во времени, даже при оптимизации всего лишь на 4 такта вперед уже достигает того же качества управления, что и при оптимизации на всей бесконечной последовательности будущих состояний.

В этом и заключается конкретное содержание асимптотического закона, присущего принципу управления с оптимизацией прогноза, установленного в непрерывном случае [38]. Этот закон указывает на то, что увеличение времени упреждения прогноза N_y^n сверх некоторого конкретного значения N_y^0 (в общем случае различного для разных классов объектов, функционалов и иных условий функционирования) практически не влияет на процессы в системе управления по принципу оптимизации прогноза.

Особенностью дискретного аналога принципа максимума является то обстоятельство, что если уравнения движения объекта взяты в прямых разностях, то уравнения сопряженной системы получаются в обратных разностях и наоборот. Это создает определенные трудности в представлении общего решения системы (6).

Во втором уравнении этой системы произведем замену независимой переменной k на $k + 1$. Тогда система примет вид:

$$\bar{y}_{k+1}^0 = A_k \bar{y}_k^0 + P_k \bar{\psi}_k^0;$$

$$\bar{\psi}_{k+1}^0 = -Q_{k+1} \bar{y}_{k+1}^0 + A_{k+1}^T \bar{\psi}_{k+1}^0 - Q_{k+1} \bar{y}_{3k+1}^0.$$

Или, после соответствующей перегруппировки, в матричном виде:

$$\left\| \begin{array}{cc} E & 0 \\ -Q_{k+1} & A_{k+1}^T \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \bar{y}_{k+1}^0 \\ \bar{\psi}_{k+1}^0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_k & P_k \\ 0 & E \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \bar{y}_k^0 \\ \bar{\psi}_k^0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ Q_{k+1} \end{array} \right\| \bar{y}_{3k+1}^0,$$

где

$$\det \left\| \begin{array}{cc} E & Q \\ -Q_{k+1} & A_{k+1}^T \end{array} \right\| = |A_{k+1}^T|.$$

Полагаем, что

$$|A_k| \neq 0, \quad \forall k \in [n, n + N_y].$$

Тогда, пользуясь формулой Фробениуса для обращения блочных матриц, получим

$$\left\| \begin{array}{cc} E & 0 \\ -Q_{k+1} & A_{k+1}^0 \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} E & 0 \\ (A_{k+1}^{-1})^T Q_{k+1} & (A_{k+1}^{-1})^T \end{array} \right\|.$$

После умножения обеих частей уравнения слева на обращенную матрицу получим систему уравнений (7), эквивалентную системе (6), т. е. общее решение системы:

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{y}_{k+1}^0 \\ \bar{\psi}_{k+1}^0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_k & P_k \\ (A_{k+1}^{-1})^T (Q_{k+1} A_k + E) & (A_{k+1}^{-1})^T (Q_{k+1} R_k + E) \end{array} \right\| \times \\ \times \left\| \begin{array}{c} \bar{y}_k^0 \\ \bar{\psi}_k^0 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ (A_{k+1}^{-1})^T Q_{k+1} \end{array} \right\| \bar{y}_{3k+1}^0.$$

Выводы. Линейность прогнозирующей модели позволила использовать для оптимизации управления принцип максимума Понтрягина и выделить основные свойства системы с оптимизацией прогноза (в частности, открыть асимптотический закон, согласно которому при увеличении времени упреждения линейного фильтра оптимальное управление изменяется все меньше и меньше, а устойчивость системы возрастает (монотонно или с затухающими колебаниями) до некоторого установившегося значения. Увеличивая время упреждения, можно получить устойчивую систему даже при неустойчивом статистически объекте (режим «искусственной устойчивости»).

Полученное выше точное решение относится только к сравнительно небольшой области линейных систем малой размерности при небольшом числе характеристических переменных и для определенной формы функционала качества. Однако этой области достаточно, чтобы сравнить в ней результаты синтеза управления с оптимизацией прогноза по точному методу принципа максимума и по приближенному многорядному алгоритму селекции лучших управлений (принципу самоорганизации). Аналогичность результатов доказывает применимость принципа самоорганизации,

Выше было доказано асимптотическое изменение параметров прогнозирующего фильтра с увеличением времени упреждения прогноза. Тем самым доказано и асимптотическое изменение выходной величины — прогнозируемого показателя качества системы, поскольку в течение небольшого времени расчета прогноза входные данные можно считать неизменными. Если после некоторого значения N , параметры оптимального фильтра устанавливаются, то стабилизируются и его прогнозы.

В заключение отметим отличия прогнозирующих фильтров, синтезируемых по МГУА, и линейного фильтра Калмана.

Модель (фильтр) оптимальной сложности по МГУА и фильтр Калмана. Коэффициенты уравнения фильтра Калмана определяются по методу наименьших квадратов (т. е. по минимуму дисперсии) на всех заданных точках. Число точек должно быть в пять — десять раз больше числа определяемых коэффициентов. Внешним дополнением, позволяющим остановиться на единственном результате синтеза, является назначение степени полинома: обычно точек (и памяти машины) хватает только на линейный полином.

Оценки коэффициентов модели или фильтра МГУА определяются по минимуму дисперсии на части заданных точек, называемой обучающей последовательностью. Число точек обучающей последовательности должно быть по крайней мере на единицу больше числа коэффициентов частных полиномов, т. е. алгебраический минимум точек равен всего пяти — семи точкам. Внешним дополнением, позволяющим найти единственную модель оптимальной сложности,

является целесообразно выбранный критерий селекции (регулярности, несмещенности и др.), определяемый на отдельном множестве точек, называемом проверочной последовательностью. Минимум критерия селекции определяет собой модель (фильтр) оптимальной сложности [24, 40].

Таким образом, фильтр МГУА и фильтр Калмана принципиально различны по виду внешнего дополнения и по числу точек, используемых для обучения коэффициентов. Поэтому эти фильтры имеют различные значения коэффициентов и различные структуры.

1. Амосов Н. М. Искусственный разум. Киев, «Наукова думка», 1969, 155 с. со схем.
2. Амосов Н. М., Касаткин А. М., Талаев С. А. Автоматы и разумное поведение. Опыт моделирования. Киев, «Наукова думка», 1973, 373 с. с ил.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Изд. 2-е, т. 1. М., Физматгиз, 1962, 464 с. с ил.
4. Бестужев-Лада И. В. Прогнозирование в Советском Союзе.— «Курьер Юнеско», 1971, № 4, с. 22—28 с ил.
5. Бир Ст. Кибернетика и управление производством. Изд. 2-е, доп. Под ред. А. Б. Челюсткина. М., «Наука», 1965, 391 с. с ил.
6. Бойчук Л. М., Толокняненко В. А. Фильтр Калмана (обзор).— «Автоматика», 1971, № 4, с. 85—91 с ил.
7. Браверман В. Я., Фомичев А. А. Некоторые особенности применения метода группового учета аргументов при малых выборках.— «Автоматика», 1974, № 2, с. 34—40 с ил.
8. Брайер Г. В., Пановский Г. А. Статистические методы в метеорологии. Под ред. д-ра физ.-мат. наук проф. Л. С. Гандича. Л., Госметеиздат, 1967, 242 с. с ил.
9. Брайсон А., Хо Ю-ш и. Прикладная теория оптимального управления. Под ред. А. М. Летова. М., «Мир», 1972, 544 с. с ил.
10. Вапник В. Н. Задача обучения распознаванию образов. М., «Знание», 1971, 60 с. с ил.
11. Винер Н. Мое отношение к кибернетике, ее прошлое и будущее. М., «Советское радио», 1969, 30 с. с ил.
12. Габор Д., Вилби В. Р., Вудкок Р. А. Универсальный нелинейный фильтр для прогнозирования и моделирования, оптимизирующийся в процессе обучения.— Экспресс-информация «Приборы и элементы промышленной автоматизации», 1961, № 47, с. 269—271 с ил.
13. Галицкий В. К., Олеярш Г. Б., Ревенко В. Л. Программа на языке ФОРТРАН для оценки корреляционной матрицы с неполными данными.— «Автоматика», 1973, № 3, с. 81—85 с ил.
14. Глестон С. Введение в электрохимию. Под ред. проф. Б. Н. Кабанова. М., Изд. иностр. лит., 1951, 768 с. с ил.
15. Гуляев А. В., Светальский Б. К., Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для решения задачи самоорганизации математических моделей сложных объектов по алгоритму МГУА с полиномами первой или второй степени без протекции отдельным переменным.— «Автоматика», 1972, № 6, с. 76—79 с ил.
16. Глушков В. М. Введение в АСУ. Киев, «Техніка», 1972, 309 с. с ил.
17. Гуляев Н. В., Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для многократного прогнозирования с полиномиальным алгоритмом МГУА.— «Автоматика», 1973, № 2, с. 87—92 с ил.
18. Гуляев Н. В., Тодуа Н. Н., Тулупчук Н. В. Программа вычисления коэффициента корреляции нахождения факторов нагрузок центроидным методом (для алгоритмов МГУА).— «Автоматика», 1971, № 6, с. 74—76 с ил.
19. Давыдова А. И. Использование пространственно-временных закономерностей колебаний стока для его экстраполяции.— В кн.: «Формирование ресурсов вод суши». Сб. статей. Отв. ред. чл.-кор. АН СССР Г. П. Калинин. М., «Наука», 1972, 132 с. с ил.
20. Демидович В. И. О восстановлении функций и ее производных по экспериментальной информации.— В кн.: «Вычислительные методы и программирование». Под ред. А. Н. Тихонова. Вып. VIII. М., 1967, с. 96—103 с ил.
21. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. Под ред. акад. Ю. В. Линника. М., «Наука», 1972, 383 с. с ил.
22. Зубов В. И. Лекции по теории управления. Ч. I. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1972, 203 с. с ил.
23. Емельянов-Ярославский Л. Б. Принципы работы неформального автомата.— «Автоматика», 1964, № 1, с. 29—43 с ил.
24. Ивахненко А. Г., Зайченко Ю. П., Димитров В. Д. Принятие решений на основе самоорганизации. М., «Советское радио», 1975, 312 с. с ил.
25. Ивахненко О. Г. Кибернетичні системи з комбінованим керуванням. К., Держтехвидав УРСР, 1963, 487 с. з іл.
26. Ивахненко А. Г. Кибернетические предсказывающие устройства. Киев, «Наукова думка», 1965, 214 с. с ил.
27. Ивахненко А. Г. Кибернетические системы с комбинированным управлением. Киев, «Техніка», 1966, 512 с. с ил.
28. Ивахненко А. Г., Ковальчук П. И. О единственности восстановления кривой регрессии методом самоорганизации по малому числу точек.— «Автоматика», 1972, № 5, с. 41—48 с ил.
29. Ивахненко А. Г., Комаров Б. К. О возможности получения нулевой и отрицательной ошибки в системах стабилизации без связи по возмущению. Всесоюзное совещание по теории инвариантности и ее применению в системах автоматического управления. Киев, 1966. Труды в 2-х т. Т. I. М., «Наука», 1970, с. 237—245 с ил.
30. Ивахненко А. Г., Коппа Ю. В., Тодуа Н. Н. Метод математического моделирования сложных экологических систем.— «Автоматика», 1971, № 4, с. 34—41 с ил.
31. Ивахненко А. Г., Лапа В. Г. Предсказание случайных процессов. Киев, «Наукова думка», 1971, 416 с. с ил.
32. Ивахненко А. Г. Объективная структурная идентификация дифференциальных уравнений по малому числу наблюдений методами самоорганизации.— «Автоматика», 1972, № 2, с. 43—60 с ил.
33. Ивахненко А. Г. Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования. Киев, Изд-во Акад. наук УССР, 1957, 53 с. с ил.
34. Ивахненко А. Г. Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления. Киев, «Техніка», 1969, 392 с. с ил.
35. Ивахненко А. Г. Самообучающиеся системы с положительными обратными связями. Справочное пособие. Киев, Изд-во АН УССР, 1963, 328 с. с ил.
36. Ивахненко А. Г., Светальский Б. К., Стеценко П. Д. Объективная структурная идентификация процесса фотосинтеза методами самоорганизации.— «Автоматика», 1972, № 6, с. 32—39 с ил.

37. Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. Киев, «Техніка», 1971, 372 с. с ил.
38. Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. Киев, Гостехиздат УССР, 1959, 423 с. с ил.
39. Ивахненко А. Г., Тодуа Н. Н. Проблемы статистического прогнозирования случайных процессов по принципам самоорганизации уравнений прогноза. — «Автоматика», 1972, № 3, с. 66—75; 1973, № 2, с. 63—72, № 3, с. 35—42 с ил.
40. Ивахненко А. Г., Тодуа Н. Н., Фомичев А. А. Структурный синтез по обобщенному алгоритму МГУА фильтров для косвенного измерения переменных. — «Автоматика», 1973, № 1, с. 49—61 с ил.
41. Ивахненко А. Г., Толокняненко В. А. Управление с оптимизацией прогноза при несложных непрерывных моделях объекта. — «Автоматика», 1973, № 2, с. 64—71 с ил.
42. Ивахненко А. Г., Чукин Ю. В. Целенаправленная регуляризация в задачах крайнесрочного и среднесрочного прогнозирования, решаемых при помощи выделения тренда оптимальной сложности. — «Автоматика», 1972, № 1, с. 57—64 с ил.
43. Ивахненко А. Г. Электроавтоматика. Элементы теории электрических систем регулирования. Киев, Гостехиздат УССР, 1957, 450 с. с ил.
44. Ивахненко Н. А., Кваско М. З. Комбинаторные алгоритмы МГУА, в которых экзамену на регулярность подвергаются как «симметричные» так и «несимметричные» полиномы. — «Автоматика», 1972, № 5, с. 48—58 с ил.
45. Ивахненко Н. А. Комбинаторный алгоритм и программа моделирования сложного объекта для долгосрочного прогнозирования по трендам с использованием критериев физической реализуемости и баланса переменных. — В кн.: «Прямой синтез математических моделей сложных объектов при небольшом числе экспериментальных данных». Киев, «Наукова Думка», 1974, с. 17—20 с ил.
46. Капница П. Л. Человек и среда обитания. — «Вопросы философии», 1973, № 2, с. 36—42.
47. Козубовский С. Ф. Применение и развитие Методов Группового Учета Аргументов в США. — «Автоматика», 1974, № 1, с. 84—89, № 2, с. 73—85 с ил.
48. Коппа Ю. В. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для решения интерполяционных задач по алгоритмам МГУА с полиномами первой и второй степени. — «Автоматика», 1971, № 1, с. 88—90 с ил.
49. Коппа Ю. В., Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для выделения тренда оптимальной сложности по алгоритмам МГУА с линейными полиномами. — «Автоматика», 1971, № 5, с. 75—80 с ил.
50. Коппа Ю. В., Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для выделения гармонического тренда оптимальной сложности. — «Автоматика», 1972, № 3, с. 88—92 с ил.
51. Крыжановский О. М. Об итерационном методе определения корней уравнения. — «Автоматика и телемеханика», 1950, т. II, № 5, с. 347—360 с ил.
52. Легостаева И. Л., Ширяев А. Н. Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса. — «Теория вероятностей и ее применение», Т. 16, 1971, вып. 2, с. 339—345.
53. Ли Т. Г., Адамс Г. Э., Гейиз У. М. Управление процессами с помощью вычислительных машин (моделирование и оптимизация). Под ред. В. И. Мудрова. М., «Советское радио», 1972, 312 с. с ил.
54. Ляпунов Н. М. и др. О построении математической модели балансовых соотношений в экосистеме тропических вод океана. — В кн.: «Функционирование пелагических сообществ тропических районов океана». Под ред. М. Е. Виноградова. М., «Наука», 1971, с. 13—25 с ил.
55. Меншуткин В. В., Умнов А. А. Энергетическая модель экосистемы пелигали оз. Дальнего. — «Гидробиологический журнал», 1971, № 4, с. 11—18 с ил.
56. Молер К., Форсайт Д. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Под ред. Г. И. Марчука. М., «Мир», 1969, 167 с с ил.
57. Морен К. Методы гильбертова пространства. Под ред. Ю. М. Березанского и Е. А. Горина. М., «Мир», 1965, 570 с с ил.
58. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.—Л., ГТТИ, 1951, 256 с с ил.
59. Налимов В. В. Теория эксперимента. М., «Наука», 1971, 207 с с ил.
60. Напалков А. В. Эвристическое программирование. Ростов-на-Дону, изд. Ростовского ун-та, 1971, 127 с с ил.
61. Патрайт И. З., Шелудько О. И., Дроботя А. И. Оценка «квалификации» вероятностных алгоритмов МГУА. — «Автоматика», 1972, № 5, с. 49—59 с ил.
62. Петраке Г., Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 алгоритма МГУА со случайным выбором партнеров. — «Автоматика», 1972, № 4, с. 87—90 с ил.
63. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Перцептроны и теория механизмов мозга. М., «Мир», 1965, 480 с с ил.
64. Сахарович Я. И. О закономерностях и возможностях долгосрочного прогнозирования географических процессов. — «Автоматика», 1972, № 5, с. 20—34 с ил.
65. Светальский Б. К. Алгоритм и программа моделирования сложной системы по критериям несмещенности и баланса переменных для системного многократного дифференциального прогноза и управления. — В кн.: «Прямой синтез математических моделей сложных объектов при небольшом числе экспериментальных данных». Киев, «Наукова Думка», 1974, с. 32—37.
66. Светальский Б. К., Тодуа Н. Н. Программа на языке АЛГОЛ-БЭСМ-6 для системного многократного дифференциального прогноза при указании априорной информации о блоках структуры объекта. — В кн.: «Прямой синтез математических моделей сложных объектов при небольшом числе экспериментальных данных». Киев, «Наукова Думка», 1974, с. 42—44 с ил.
67. «Свобода выбора решений» в последующие моменты времени как важный критерий оптимальности управления сложными случайными процессами. — «Автоматика», 1972, № 2, с. 83—91.
68. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974, 224 с с ил.
69. Тищенко А. П. Об одном способе улучшения обусловленности матриц нормальных уравнений. — «Известия вузов СССР. Раздел геодезии и аэрофотосъемки», 1961, вып. 5, с. 37—46 с ил.
70. Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для алгоритма МГУА с последовательным выделением трендов по наиболее существенным аргументам. — «Автоматика», 1972, № 2, с. 79—83 с ил.
71. Тодуа Н. Н. Программа на языке транслятора АЛГОЛ-БЭСМ-6 для выделения тренда оптимальной сложности по алгоритмам МГУА с линейными полиномами. — «Автоматика», 1971, № 5, с. 75—81 с ил.
72. Тодуа Н. Н., Гуляев Н. В. Программа обобщенного алгоритма МГУА на языке АЛГОЛ-60. — «Автоматика», 1973, № 1, с. 73—78 с ил.
73. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (Индустриальная динамика). М., «Прогресс», 1971, 340 с.
74. Чукин Ю. В. Определение коэффициентов уравнения прогноза по кри-

- терию «вероятности попадания в коридор отклонений». — «Автоматика», 1973, № 3, с. 50—55 с ил.
75. Ш и л о в Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. III. М., «Наука», 352 с. с ил.
76. Ш и м а р а е в М. Н. Гидрометеорологические факторы и колебания численности Байкальского планктона. — В кн.: «Лимнология придельтовых пространств Байкала». Селенгинский район. Труды лимнологического ин-та. Т. 12 (32). М., «Наука», 1971, 259—267 с ил.
77. Ш т о р м Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. Под ред. Н. С. Райбмана. М., «Мир», 1970, 368 с. с ил.
78. B o y d K. World Dynamics. A. Note, Science, Vol. 177, 1973.
79. C u y p e r s J. G. World Dynamics. Two simplified versions Forrester's model, Automatica Vol. 3, May 1973.
80. F o r r e s t e r J. World Dynamics. Wright Allen Press, Inc. 1971.
81. G a b o r D. Cybernetics an the Future of Industrial Civilization, Journal of Cybernetics, 1, 2, 1971, pp. 1—4.
82. G a b o r D. The Proper Priorities of Science and Technology. University Southampton, England, 1972.
83. K a y s e n C. The Computer that Printed out «Wolfs», Foreign Affairs, July 1972, pp. 660.
84. M e a d o w s D. H., M e a d o w s D. L. The Limits to Growth». Potomac Associate ed Book., 1972.
85. National Income and Expenditure. Journal, Her Majesty's Stationary Office, London, 1969, 1970.
86. P a r k s P. C., P y a t t F. G. Controlling the Economy — an Exercise in Collaboration, Electronics and Power, August, 1969.
87. P a r k s P. C., P y a t t F. G. An Introduction to the Analysis and Control of Dynamic Models in Economics, Measurement and Control, July 1968, pp. 255—258.
88. P a t t e n B. C. Preliminary Method for Estimating Stability in Plankton. Science, Vol. 134, No 3824 (1961).
89. S t a r C h. R u d m a n K. Parameters of Technological growth. Science, Vol. 182, 1973.
90. W o l b e r g T. R. Prediction analysis, D. Van, Nastrand Company, London, 1967.

Пример 1. Восстановление закона по ортогонализированному алгоритму МГУА	42
Пример 2. Выделение тренда оптимальной сложности	43
Пример 3. Замена полных полиномов частными	48
Пример 4. Получение абсолютных оценок коэффициентов полинома	57
Пример 5. Восьмой способ регуляризации для ряда уравнений регрессии	79
Пример 6. Прогноз загрузки промышленности Англии на 3—4 года вперед, с выделением тренда оптимальной сложности при целенаправленной регуляризации	90
Пример 7. Определение оптимального способа целенаправленной регуляризации для выделения тренда процесса изменения степени загрузки промышленности Англии	93
Пример 8. Полиномиальные тренды для прогнозов «Днепр» и «Англия»	105
Пример 9. Моделирование процесса стока р. Днепр	144
Пример 10. Прогнозирование расхода р. Северский Донец	156
Пример 11. Моделирование экономической системы Англии на машине БЭСМ-6	163
Пример 12. Открытие формулы расчета мощности постоянного тока при наличии помех	189
Пример 13. Открытие закона деструкции пестицидов	192
Пример 14. Открытие закона Онзагера	196
Пример 15. Анализ устойчивости и определение степени стабильности экологической системы «планктон—среда» Белого моря	204
Пример 16. Определение критического загрязнения оз. Байкал	210
Пример 17. Прогнозирование числа жителей города	218
Пример 18. Управление с оптимизацией прогноза для детерминированного объекта (гидростанции)	229
Пример 19. Самоорганизация модели и синтез управления (с оптимизацией прогноза) газовым режимом Каховского водохранилища	234
Пример 20. Синтез управления для двухмерной линейной системы	255
Пример 21. Синтез управления экономической системой Англии (в конце 1965 г.)	267
Пример 22. Самоорганизация уравнений прогнозирования динамики Мира по данным до 1975 г. включительно	278
Пример 23. Самоорганизация модели и синтез управления с оптимизацией прогноза по методу полного перебора вершин гиперкуба возможных управлений	279

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	3
Основные обозначения.	17
Глава I. Элементы теории Метода Группового Учета Аргументов (МГУА)	19
«Страна» маятников.	20
«Страна» множественности моделей, в которой отказываются от абсолютных оценок.	22
Регуляризация как заменитель модели мышления.	24
Свобода выбора решений по Д. Габору.	25
Основные недостатки современного математического моделирования и выбор критерия регуляризации.	26
«Страна» единственности математических моделей, выбранных по второму критерию.	29
Общая схема построения алгоритмов по МГУА.	30
Основные алгоритмы МГУА.	32
Обобщенные алгоритмы МГУА.	35
Ортогонализированные алгоритмы МГУА для открытия законов....	39
Критерий относительной несмещенности.	41
Теория проекторов как обоснование линейных полиномиальных алгоритмов МГУА.	44
Теоремы теории МГУА.	45
Достаточное условие сходимости алгоритма МГУА за конечное число шагов	52
Объяснение «ошибки многорядности».	54
Особенности вычислительных программ МГУА.	60
Вычислительные программы по принципу самоорганизации моделей...	62
Глава II. Целенаправленная регуляризация и однократный среднесрочный прогноз	65
Человеческое предвидение и машинное прогнозирование будущего....	66
Определение некоторых терминов.	68
Предсказуемость случайного процесса при однократном прогнозе....	69
Классификация алгоритмов прогнозирования и выбор области их сравнения по точности.	70
Способы целенаправленной регуляризации.	73
Оптимизация шестого способа регуляризации.	84
Оптимизация четвертого способа регуляризации.	91
Сравнение алгоритмов МГУА и способов целенаправленной регуляризации на примере однократного среднесрочного прогноза.	95
Однократный прогноз среднегодового расхода воды в р. Днепр на ближайшее десятилетие.	108
Построение корреляционных функций для выбора наиболее эффективных аргументов.	111
Элементы математической теории целенаправленной регуляризации	112
Глава III. Системный многократный дифференциальный долгосрочный прогноз	119
Определение понятия «система».	120
Почему сложная задача моделирования часто оказывается довольно простой	122

Особенности системного многократного дифференциального прогноза...	124
Качественный анализ точности системного многократного дифференциального прогноза.	125
Синтез остатков по трем внешним дополнениям.	127
Прогноз с выделением двух временных трендов оптимальной сложности: тренда переменной и тренда отклонения.	133
Описание алгоритма системного многократного дифференциального прогноза с выделением временных трендов.	135
Общая схема алгоритма дифференциального прогноза.	139
Многократное долгосрочное прогнозирование годового стока рек....	140
Многократное долгосрочное прогнозирование среднемесячного стока рек по принципу самоорганизации.	153
Моделирование экономической системы.	159
Глава IV. Самоорганизация математических моделей на ЭВМ.	171
Задачи восстановления (открытия) законов или объективной структурной идентификации.	172
Метод самоорганизации моделей сложных объектов.	176
Проблема усреднения данных.	178
Иерархия критериев в задачах открытия законов и идентификации характеристик.	179
Выбор физического закона среди множества самых точных математических моделей.	184
Возможные неудачи машинного синтеза физических законов.	184
Открытие законов при помощи комбинаторного алгоритма МГУА.	186
Открытие законов при помощи упрощенного ортогонализированного алгоритма МГУА.	190
Открытие законов при помощи модификации упрощенного ортогонализированного алгоритма МГУА.	194
Исследование устойчивости экологической системы моря.	200
Прямое определение допустимого загрязнения водоемов по малому числу натурных измерений.	209
Глава V. Автоматическое управление сложными объектами с оптимизацией прогноза.	213
О методах синтеза управления с оптимизацией прогноза.	213
Иерархия критериев в задачах прогнозирования.	215
Управление с оптимизацией прогноза при дискретных моделях объекта и задача его синтеза.	221
Синтез управления с оптимизацией прогноза по методам самоорганизации и динамического программирования.	224
Синтез управления с оптимизацией прогноза по упрощенному варианту принципа максимума.	242
Самоорганизация модели экономической системы Англии по многорядному алгоритму МГУА.	245
Алгоритм синтеза управления с оптимизацией прогноза по упрощенному варианту принципа максимума.	251
Синтез управления с оптимизацией прогноза по методу полного перебора вершин гиперкуба управлений.	268
Синтез управления с оптимизацией прогноза по принципу максимума для линейных дискретных уравнений динамики объекта.	289
Решение задачи минимизации функционала и вывод уравнений движения замкнутой системы.	292
Литература.	304
Список примеров.	309

Алексей Григорьевич Ивахненко,
д-р техн. наук,
чл.-кор. АН УССР

ДОЛГОСРОЧНОЕ
ПРОГНОЗИРОВА-
НИЕ
И УПРАВЛЕНИЕ
СЛОЖНЫМИ
СИСТЕМАМИ

Редактор издательства инж. *Л. И. Носова*
Переплет художника *В. М. Флакса*
Художественный редактор *В. С. Шапошников*
Технический редактор *С. В. Иванус*
Корректоры *Г. Г. Бондарчук* и *В. В. Цекало*

Сдано в набор 17.XII. 1974 г. Подписано к печати 19.IX.
1975 г. Формат бумаги 60x84 $\frac{1}{8}$. Бумага типографская № 1.
Объем: 18,14 усл. печ. л.; 19,25 уч.-изд. л. Тираж 8000.
Зак. № 5-2218. БФ 05114. Цена 1 руб. 51 коп.

Издательство «Техніка», 252601, Киев, 1, ГСП, Пушкинская, 28

Отпечатано с матриц Головного предприятия республикан-
ского производственного объединения «Полиграфкнига»
Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3 на Харь-
ковской книжной фабрике «Коммунист» республиканского
производственного объединения «Полиграфкнига» Госком-
издата УССР, Харьков, ул. Энгельса, 11.